

三次中性子相関に基づく 未臨界度測定法の検討

名古屋大学大学院

工学研究科博士課程

原子核工学専攻（前期課程）

原子核第一講座

遠藤知弘

2004年2月12日

目次

Chapter 1 序論	1
1.1 本研究の背景と目的	1
1.2 本論文の構成	3
Chapter 2 未臨界度測定法の概要	4
2.1 本章の目的・概要	4
2.2 未臨界度	4
2.3 現在までに提案された未臨界度測定法の例	4
2.4 定常状態の中性子束密度を利用した未臨界度測定法（静的手法）	5
2.4.1 中性子源増倍法	5
2.4.2 指数実験法	6
2.5 中性子束密度の時間変化を利用した未臨界度測定法（動的手法）	7
2.5.1 パルス中性子法	8
2.5.2 中性子源挿入法	10
2.5.3 中性子源引抜法	13
2.6 炉雑音解析を用いた未臨界度測定法	15
2.6.1 Feynman- α 法	16
2.6.2 Rossi- α 法	17
2.6.3 周波数解析	18
2.6.4 Mihalczo 法	19
2.6.5 三次中性子相関法	20
2.7 本章のまとめ	22
Chapter 3 物理的直感法に基づいた Y 、 X 値の理論式導出	25
3.1 本章の目的・概要	25
3.2 理論式導出条件	25
3.3 物理的直感法	25
3.4 グリーン関数	26
3.4.1 1点炉・エネルギー1群近似の場合のグリーン関数	27
3.4.2 固有関数展開を利用したグリーン関数の導出	27
3.5 1時点検出確率	28
3.6 2時点検出確率	29

3.6.1 2つの独立な連鎖反応家系から成る 2 時点検出確率	30
3.6.2 同一の連鎖反応家系から成る 2 時点検出確率	30
3.6.3 全 2 時点検出確率	33
3.7.3 時点検出確率	33
3.7.1 3つの独立な連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率	34
3.7.2 2つの独立な連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率	34
3.7.3 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率	36
3.7.4 全 3 時点検出確率	41
3.8 空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式導出	42
3.8.1 中性子検出数の階乗モーメントの期待値	42
3.8.2 二次相関量 Y 値	43
3.8.3 三次相関量 X 値	44
3.8.4 空間・中性子エネルギー・方向依存性の基本モード近似	47
3.9 データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式導出	49
3.9.1 中性子検出数の測定法	49
3.9.2 1~3 時点検出確率の基本モード近似式	50
3.9.3 中性子検出数のモーメントの期待値	51
3.9.4 標本分散と標本三次モーメントを用いた場合の Y 、 X 値の理論式	54
3.9.5 不偏分散と不偏三次モーメントを用いた場合の Y 、 X 値の理論式	60
3.9.6 分散、三次モーメントの最良評価法	63
3.10 本章のまとめ	64
Chapter 4 中性子検出確率のバランス方程式に基づいた Y 、 X 値の一般理論	65
4.1 本章の目的・概要	65
4.2 理論式導出条件	65
4.3 確率母関数	66
4.4 1 個の中性子が体系に投入された場合の中性子検出確率	67
4.4.1 中性子検出確率のバランス方程式	68
4.4.2 検出確率の確率母関数の偏微分方程式	73
4.4.3 中性子検出数の階乗モーメントの期待値が従う随伴輸送方程式	74
4.5 外部中性子源が体系に投入された場合の中性子検出確率	79
4.5.1 外部中性子源が体系に投入された場合の中性子検出確率のバランス方程式	79
4.5.2 外部中性子源が投入された場合の確率母関数の微分方程式	81
4.5.3 バートレットの公式	82
4.5.4 中性子検出数の階乗モーメントの期待値が従う積分方程式	82
4.6 空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論	85
4.6.1 二次相関量 Y 値の一般理論	85

4.6.2	三次相関量 X 値の一般理論.....	85
4.6.3	確率母関数の拡散近似式.....	86
4.7	空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の飽和値の一般理論.....	89
4.7.1	確率母関数の定常解が従う偏微分方程式.....	89
4.7.2	中性子検出数の階乗モーメントの期待値の定常解が従う随伴輸送方程式.....	91
4.7.3	二次相関量 Y 値の飽和値の一般理論.....	92
4.7.4	三次相関量 X 値の飽和値の一般理論.....	92
4.7.5	固有関数展開を利用した Y 、 X 値の飽和値の理論式.....	93
4.7.6	定常状態における角度中性子束および検出反応に対する 随伴角度中性子数密度を利用した Y 、 X 値の飽和値の理論式.....	96
4.8	本章のまとめ.....	100
Chapter 5 数値計算を利用した三次中性子相関法の検証.....		101
5.1	本章の目的・概要.....	101
5.2	データ数の有限性の効果の検証.....	101
5.2.1	計算条件.....	102
5.2.2	無限・均質体系、エネルギー1群、遅発中性子を無視した場合の Y 、 X 値の理論式..	104
5.2.3	無限・均質体系、エネルギー1群の場合の三次中性子相関法の解析公式.....	106
5.2.4	モンテカルロシミュレーション計算結果.....	107
5.3	空間依存性の効果の検証.....	122
5.3.1	計算条件.....	123
5.3.2	計算体系の検証.....	126
5.3.3	固有関数展開を利用した Y 、 X 値の理論式.....	130
5.3.4	基本モード近似による三次中性子相関法の解析公式.....	132
5.3.5	モンテカルロシミュレーション計算結果.....	135
5.3.6	決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを利用した空間依存性の検討.....	146
5.4	本章のまとめ.....	163
Chapter 6 結論.....		164
6.1	結論.....	164
6.2	今後の課題.....	165
謝辞.....		166
参考文献.....		167
Appendix A 京都大学臨界集合体実験装置における三次中性子相関法による未臨界度測定実験		169
A.1	目的.....	169
A.2	実験の概要.....	169

A.3 Y 、 X 値の測定結果	172
A.4 三次中性子相関法による未臨界度評価結果	176
A.5 まとめ	180
Appendix B 自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムの概要	181
B.1 目的	181
B.2 概要	181
B.3 計算フローチャート	181
B.4 具体的な処理法	185
B.5 1 群定数の作成	187
公刊論文リスト	190

Chapter 1

序論

1.1 本研究の背景と目的

近年、我が国では原子力エネルギーの有効利用に不可欠な核燃料サイクルの確立を目指して、再処理施設等の建設が行われている。これらの核燃料取扱施設では、原子炉施設と異なって、体系内の核分裂連鎖反応を制御する反応度制御設備が備えられていない。万が一、このような反応度制御設備を持たない施設で臨界超過状態になったとすると、核分裂反応が指数関数的に増加し臨界事故を引き起こすことになる。従って、いかなる状況下でも臨界に達しないように核燃料の取扱量、濃度、取扱機器の形状や配置等を管理・制限する必要がある。これらの制限値は主に数値計算による解析に基づいて、十分安全が確保されるように定められる。しかしこの解析には不確定な要素が多数存在するので、制限値に必要以上の安全裕度が見込まれているのが現状である。

このような制限値の不確定な要素を軽減するために、現行の臨界安全管理に加えて、未臨界度測定技術を適用することが現在検討されている^[1]。仮に未臨界度測定技術を現実の核燃料取扱施設に適用することができれば、より確実に安全管理をすることが可能になる。さらに、未臨界度測定により得られた結果を設計・管理に反映させることで、過剰な安全裕度を軽減することができ、より最適な制限値を設定することが可能になると考えられる。その結果、より最適に核燃料の取り扱うことが可能となり、経済性を向上させることができると考えられる。

今日に至るまでに、未臨界度測定法として多くの手法が提案されてきた。例えば、中性子源増倍法^[2]、指数実験法^[3]、パルス中性子法^[4,5]、Feynman- α 法^[6,7]、Mihalczo法^[8]などの手法が挙げられる。ここで未臨界度測定技術を実際の核燃料取扱施設に適用することを考えた場合、測定するのに手間がかかる手法、特殊な装置を必要とする手法、体系に動的な変化を加えて通常運転を妨げる手法というのはあまり望ましくない。例えばパルス中性子法では、パルス中性子を打ち込むのに加速器が必要不可欠である。またMihalczo法ではCf線源内蔵検出器という特殊な検出器が必要となる。従ってパルス中性子法、Mihalczo法は測定装置の特殊さや管理の難しさに欠点がある。一方、中性子源増倍法、指数実験法、Feynman- α 法は、体系に動的な変化を加えることなく、中性子検出器で計数するだけで簡便に測定可能である。しかしこれらの手法は、未臨界度を相対的にしか評価できないという欠点がある。例えば、中性子源増倍法の場合、体系の未臨界度を測定するには、未臨界度が既知である基準体系の計数率が必要となる。指数実験法の場合は測定により得られた空間減衰定数（もしくはバックリング）を未臨界度に換算するための係数をあらかじめ数値計算で求めておかなければならない。またFeynman- α 法の場合、測定により直接得られるのは即発中性子減衰定数 α なので、数値計算により α を未臨界度に換算するか、未臨界度が既知である基準体系の α の値を利用して未臨界度に換算する必要がある。

このように、上で挙げた未臨界度測定法にはそれぞれに長所・短所があり、中性子検出器のみで簡便に測定可能で、かつ未臨界度を絶対値で評価可能であるという理想的な測定法はない。そこで本研究では、古橋により提案された三次中性子相関法^[9]に着目した。三次中性子相関法は炉雑音解析手法の一つであり、中性子検出数の時間的ゆらぎを解析することで未臨界度を評価する手法である。三次中性子相関法では、Feynman- α 法同様に、検出時間幅 T の間に検出された中性子数の分散と平均の比から二次相関量 Y 値を測定する。それに加えて、中性子検出数の三次モーメント(third order central moment)から Y 値と同様に定義される三次相関量 X 値を測定する。こうして得られた Y 、 X 値に対して検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値を推定し、得られた Y 、 X 値の飽和値を換算することで未臨界度の絶対値を得ることができる。 Y 、 X 値の飽和値を未臨界度の絶対値に換算する際には、核分裂および外部中性子源で発生する中性子数 ν 、 q の階乗モーメントの値が必要となるが、これらの値としては例えば Diven により測定された文献値^[10]を用いることができる。

三次中性子相関法を用いる利点としては以下の点が挙げられる。

- 1) 体系に動的な変化を加える必要がないので、通常運転を妨げることなく測定可能
- 2) 定常外部中性子源と中性子検出器のみで簡便に測定可能
- 3) ν 、 q の階乗モーメントとして文献値を用いれば、未臨界度の絶対値を評価することが可能

ただし筆者が過去に行った卒業研究において、三次中性子相関法には以下のような問題点があることが明らかになった^[11]。

- 1) 実際の測定では測定時間が限られるため、 Y 、 X 値を測定するのに必要となる分散および三次モーメントは有限個のデータから推定される。このデータ数が十分多くないと、真の分散、三次モーメントを正しく推定することができない。その結果、 Y 、 X 値が真値に比べて過小評価されてしまう。特に Y 、 X 値を測定する際にパンチング処理を用いる場合、検出時間幅 T が大きくなるにつれデータ数が少なくなるため、結果的に T が大きくなっても Y 、 X 値が飽和せず、むしろ落ち込んでしまう。
- 2) 従来の三次中性子相関法の解析公式は 1 点炉近似・エネルギー 1 群で導出されている。しかし実際の未臨界度測定に三次中性子相関法を適用するためには、空間・中性子エネルギーの効果をも十分に考慮する必要がある。

実際の未臨界度測定に三次中性子相関法を適用するためには、上で述べた問題点を解決する必要がある。そこで、本研究では三次中性子相関法の理論を見直し、データ数の有限性および空間依存性の効果を考慮に入れた三次中性子相関法を新たに提案することを目的とした。

1.2 本論文の構成

本論文は全6章で構成される。各章の概要は以下のようなものである。

第1章：序論

本研究の背景および目的について述べた。

第2章：未臨界度測定法の概要

現在までに提案された未臨界度測定法の概要について述べる。三次中性子相関法と他の未臨界度測定法の特徴を比較することで、本研究で着目した三次中性子相関法の利点について述べる。

第3章：物理的直感法に基づいた Y 、 X 値の理論式導出

物理的直感法に基づいて、空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出する。ここで空間・中性子エネルギー・方向依存性について基本モード成分を考慮に入れた、新たな三次中性子相関法を提案する。また、データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出する。

第4章：中性子検出確率のバランス方程式に基づいた Y 、 X 値の一般理論

第4章では、中性子検出確率のバランス方程式に基づいて、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論を導出する。得られた Y 、 X 値の一般理論を用いることで、決定論的手法により Y 、 X 値を数値計算できることを示す。

第5章：数値計算を利用した三次中性子相関法の検証

自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムを利用して、 Y 、 X 値に現れるデータ数の有限性や空間依存性の効果について検証を行う。さらに、データ数の有限性や空間依存性の効果が、三次中性子相関法による未臨界度測定にどのような影響を及ぼすか検討を行う。

第6章：結論

本研究で得られた結論および今後の課題について述べる。

Chapter 2

未臨界度測定法の概要

2.1 本章の目的・概要

本章では、現在までに提案された未臨界度測定法の例をいくつか挙げ、それぞれの測定法の概要・利点・欠点について述べる。また、本研究で着目した三次中性子相関法の概要・利点・欠点についても述べる。最後に、それぞれの未臨界度測定法を比較することで、三次中性子相関に基づく未臨界度測定法の利点を浮き彫りにしたいと思う。

2.2 未臨界度

未臨界度($-\rho$)とは、体系の実効増倍率 k_{eff} により以下のように定義される量である。

$$(-\rho) \equiv \frac{1 - k_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}} \quad (2-1)$$

以上の定義から分かるように、未臨界度($-\rho$)は臨界に対して体系がどの程度安全であるかを表す指標である。例えば体系が臨界の場合、 $k_{\text{eff}} = 1$ なので未臨界度($-\rho$)は 0 となる。また未臨界体系の場合には、 $k_{\text{eff}} < 1$ なので($-\rho$)は正の値を取る。未臨界度($-\rho$)を測定することができれば、体系の安全性を定量的に評価・把握することができる。

2.3 現在までに提案された未臨界度測定法の例

体系の未臨界度($-\rho$)を測定する手法として、大きく分けて以下の 3 通りの方法に分類される。ただし未臨界度測定の対象とする体系としては反応度制御機能を有していない体系を想定するので、反応度印加が必要となる未臨界度測定法は除くことにする。

- 1) 定常状態の中性子束密度を利用した手法
例：中性子源増倍法^[2]、指数実験法^[3]など
- 2) 中性子束密度の時間変化を利用した手法
例：パルス中性子法^[4,5]、中性子源挿入法、中性子源引抜法^[13]など
- 3) 炉雑音解析
例：Feynman- α 法^[6,7]、Rossi- α 法^[14]、周波数解析^[16]、Mihalczo 法^[8]、三次中性子相関法^[9]など

以上で例として挙げた未臨界度測定法について、その測定法の概要・利点・欠点を以下で述べることにする。

2.4 定常状態の中性子束密度を利用した未臨界度測定法（静的手法）

以下に述べる手法は、定常状態の中性子数密度を利用した、静的手法であり、定常状態の中性子輸送方程式に基づいている。

$$\mathbf{A}f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{F}f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2-2)$$

$$\mathbf{A} \equiv \boldsymbol{\Omega} \nabla + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \quad (2-3)$$

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\chi_f(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \quad (2-4)$$

ただし \mathbf{A} は吸収・散乱・漏れによる中性子消滅演算子、 \mathbf{F} は核分裂による中性子生成演算子、 f は角度中性子束、 S は外部中性子源を表す。また $\Sigma_t(\mathbf{r}, E)$ は巨視的全断面積、 $\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega})$ は巨視的散乱断面積、 $\nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E)$ は巨視的生成断面積、 $\chi_f(E)$ は核分裂スペクトルをそれぞれ表す。

2.4.1 中性子源増倍法

中性子源増倍法は、基準となる体系の未臨界度が既知である場合に、基準体系の計数率と未臨界度を測定したい体系の計数率のみを比較することで、未臨界度を簡便に測定する手法である^[2,12]。

未臨界体系に線源強度 S の外部中性子源が投入されて、体系内の中性子束密度が定常状態に達したとする。このとき、定常状態における体系内の角度中性子束 f は(2-2)式に従う。一方、 k_{eff} 固有値方程式は以下のように表される。

$$\mathbf{A}f_k(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{F}f_k(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2-5)$$

ただし f_k は k_{eff} 固有値方程式の固有関数である。この固有関数の随伴方程式を考え、その随伴固有関数 f_k^\dagger を(2-2)式の両辺にかけて全空間・エネルギー・方向で積分して整理すれば、

$$\int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} f_k^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{F}f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{(-\rho)} \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} f_k^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2-6)$$

となる。上式より、測定によって得られる定常状態の計数率 C_R は、

$$C_R = \frac{1}{(-\rho)} \frac{\int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \Sigma_d(\mathbf{r}, E) f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})}{\int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} f_k^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{F}f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})} \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} f_k^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) S(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2-7)$$

と求められる。ただし $\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ は検出器の巨視的検出断面積である。議論を簡単にするために、体系の空間・中性子エネルギー依存性を無視すれば、

$$C_R \propto \frac{S}{(-\rho)} \quad (2-8)$$

のように、計数率 C_R は中性子源強度 S に比例し、未臨界度 $(-\rho)$ に反比例することが分かる。

中性子源増倍法による未臨界度測定では、まず基準体系の未臨界度 $(-\rho_0)$ を求め、この基準体系に外部中性子源を投入して定常状態の計数率 C_{R0} を測定する。次に、未臨界度を測定したい体系に対して、基準体系に投入したのと同じ中性子源を投入し、計数率 C_R を測定する。これらの計数率の比を取れば、 S を消去することができ、以下のように測定したい体系の未臨界度 $(-\rho)$ を求めることができる。

$$(-\rho) \equiv \frac{C_{R0}}{C_R} (-\rho_0) \quad (2-9)$$

以上のように中性子源増倍法は、計数率の測定のみで簡便に未臨界度を測定できるという利点があるが、以下に述べるような欠点もある。まず当然ながら、基準体系の未臨界度が既知である必要がある。また基準体系と測定体系が非常に近ければ問題ないが、そうでなければ空間・中性子エネルギーの効果を数値計算により補正する必要がある。

2.4.2 指数実験法

指数実験法とは、未臨界体系に外部中性子源を配置し、定常状態の中性子束の空間分布を測定することで、その空間減衰定数（もしくはバックリング）を求め、その値を換算することで未臨界度を測定する手法である^[3,12]。

この手法は、体系の中性子束分布 $\phi(\mathbf{r}, E)$ が径方向と軸方向に変数分離可能な場合に対して適用することができる。ここで中性子束の径方向成分を $\phi_{xy}(x, y, E)$ 、軸方向成分を $\phi_z(z)$ と表すことにする。中性子源増倍法と同様に、外部中性子源が投入されて定常状態に達した未臨界体系の中性子束 ϕ は以下の方程式に従う。

$$\mathbf{A}_{xy}\phi_{xy}(x, y, E)\phi_z(z) - D(\mathbf{r}, E)\phi_{xy}(x, y, E)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi_z(z) = \mathbf{F}\phi_{xy}(x, y, E)\phi_z(z) + S(\mathbf{r}, E) \quad (2-10)$$

$$\mathbf{A}_{xy} \equiv -D(\mathbf{r}, E)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \quad (2-11)$$

ただし \mathbf{A}_{xy} は z 軸方向の漏れを除いた中性子消滅演算子、 $D(\mathbf{r}, E)$ は拡散係数を表す。外部中性子源の直接的な影響がない領域で、かつ中性子束分布の高次モード成分が十分減衰した領域において、 z 軸方向の中性子束の空間分布が以下のような基本モード分布に従うとする。

$$\phi_z(z) \propto A \sinh(\gamma_z z) + B \cosh(\gamma_z z) \quad (x-y \text{ 平面方向の漏れが } z \text{ 軸方向に比べて大きい場合}) \quad (2-12)$$

$$\phi_z(z) \propto A \sin(B_z z) + B \cos(B_z z) \quad (x-y \text{ 平面方向の漏れが } z \text{ 軸方向に比べて小さい場合}) \quad (2-13)$$

ただし γ_z は基本モードの z 軸方向の空間減衰定数、 B_z は基本モードの z 軸方向のバックリングを表し、 A 、 B は境界条件で決定される任意定数とする。従って Fig. 2-1 ように、 z 軸方向の中性子束分布の基本モードを測定し、(2-12)式 ($x-y$ 平面方向の漏れの条件によっては(2-13)式) をフィッティングすることで、 γ_z (または B_z) を得ることができる。

こうして得られた γ_z (または B_z) を換算することで未臨界度 $(-\rho)$ を得ることができる。まず k_{eff} 固有値方程式は以下のように表される。

$$\mathbf{A}_{xy}\phi_{xy,k}(x, y, E) + D(x, y, E)B_{z,k}^2\phi_{xy,k}(x, y, E) = \frac{1}{k_{\text{eff}}}\mathbf{F}\phi_{xy,k}(x, y, E) \quad (2-14)$$

ただし $\phi_{xy,k}$ は k_{eff} 固有値方程式の $x-y$ 平面方向成分の固有関数で、 $B_{z,k}^2$ は k_{eff} 固有値方程式の z 軸方向の形状バックリングを表す。この固有関数の随伴方程式を考え、その随伴固有関数 $\phi_{xy,k}^\dagger$ を(2-10)式の両辺にかけて全空間・エネルギーで積分して、(2-12)式 (または(2-13)式) を用いて整理すれば、以下のようなバックリング - 未臨界度 $(-\rho)$ 換算式を得ることができる。

$$(-\rho) = K(B_{z,k}^2 + \gamma_z^2) \quad (x-y \text{ 平面方向の漏れが } z \text{ 軸方向に比べて大きい場合}) \quad (2-15)$$

$$(-\rho) = K(B_{z,k}^2 - B_z^2) \quad (x-y \text{ 平面方向の漏れが } z \text{ 軸方向に比べて小さい場合}) \quad (2-16)$$

$$K \equiv \frac{\int_S dx dy \int_0^\infty dE \phi_{xy,k}^\dagger(x, y, E) D(x, y, E) \phi_{xy}(x, y, E)}{\int_S dx dy \int_0^\infty dE \phi_{xy,k}^\dagger(x, y, E) F \phi_{xy}(x, y, E)} \quad (2-17)$$

ただし K はバックリング - 未臨界度換算係数である。従って、上式を用いてあらかじめ数値計算により K を求めておけば、測定により得られた γ_z (または B_z) を未臨界度 ($-\rho$) に換算することができる。

中性子源増倍法同様に、指数実験法も中性子検出数を測定するだけで未臨界度を測定することができる手法であるが、以下に述べるような欠点がある。まず、中性子束の空間分布を測定するために複数の地点での計数率測定が必要となる。次に、未臨界度を得るためにはあらかじめ数値計算により換算係数 K を求めておく必要がある。最後に、空間減衰定数を測定するには測定体系としてできる限り単純かつ均一な体系が望まれる。従って、体系が複雑で不均一な場合には指数実験法による未臨界度測定を適用するのは非常に困難である。

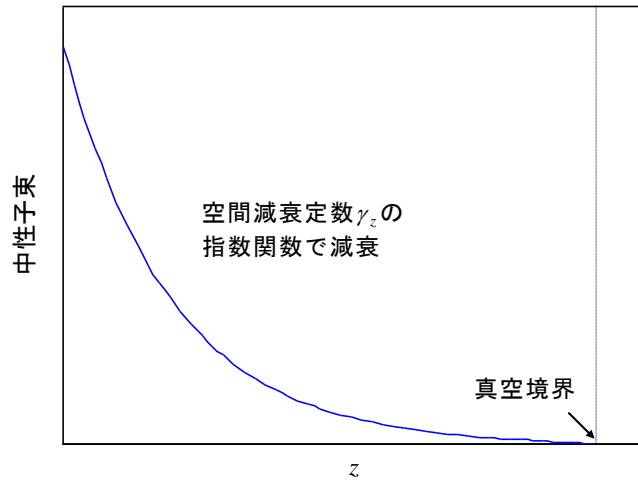


Fig. 2-1 指数実験法における中性子束の空間分布
(径方向の漏れが軸方向に比べて大きい場合)

2.5 中性子束密度の時間変化を利用した未臨界度測定法 (動的手法)

以下に述べる手法は、中性子束密度の時間変化を利用した、動的な手法であり、時間依存の中性子輸送方程式に基づいている。ただし議論を簡単にするために、空間・エネルギー依存性を無視した1点炉動特性方程式を用いることにする。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\beta_{\text{eff}} - \rho}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) + S(t) \quad (2-18)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \frac{\beta_{\text{eff},i}}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (2-19)$$

$$\beta_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^6 \beta_{\text{eff},i} \quad (2-20)$$

上式において、 n は中性子数密度、 C_i は i 群の遅発中性子先行核密度を表す。また Λ は中性子生成

時間、 β_{eff} は実効遅発中性子割合、 λ_i は*i*群の遅発中性子先行核の崩壊定数、 $\beta_{\text{eff},i}$ は*i*群の実効遅発中性子割合をそれぞれ表す。

2.5.1 パルス中性子法

パルス中性子法とは、未臨界体系にパルス状に中性子を打ち込み、その中性子数密度の時間変化を測定することで未臨界度を測定する手法である。パルス中性子法による未臨界度測定法としては、1)即発中性子減衰定数 α を利用する手法^[4]、2)面積比法^[5]、の2つの方法が主に挙げられる。

1) 即発中性子減衰定数 α を利用する手法^[4]

時刻 $t=0$ にデルタ関数状に n_0 個の中性子が打ち込まれたとすると、1点炉動特性方程式より中性子数密度の時間変化が以下のように得られる。

$$n(t) = n_0 \sum_{j=1}^7 a_j e^{-\omega_j t} \quad (2-21)$$

$$a_j = \frac{\Lambda}{\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i} \lambda_i}{(\lambda_i - \omega_j)^2}} \quad (2-22)$$

ただし時定数 ω_j ($j=1,2,\dots,7$) は以下の方程式を満足する。

$$(-\rho) = \Lambda \omega_j + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i} \omega_j}{\lambda_i - \omega_j} \quad (2-23)$$

ここで即発中性子成分の時間領域を考えたとすると、中性子数密度 $n(t)$ は以下のように近似することができる。

$$n(t) \cong n_0 e^{-\alpha t} \quad (2-24)$$

$$\alpha = \frac{\beta_{\text{eff}} - \rho}{\Lambda} \quad (2-25)$$

ただし、 α は即発中性子減衰定数を表す。

従って、Fig. 2-2 のようにパルス中性子を打ち込んだ後の中性子数密度の時間変化を測定し、(2-24)式をフィッティングすることで、即発中性子減衰定数 α を得ることができる。このようにして得られた α から、あらかじめ Λ と β_{eff} を数値計算により求めておけば、(2-25)式を用いて未臨界度 $(-\rho)$ を得ることができる。

あるいは未臨界度が既知である基準体系を利用することで、測定体系の未臨界度を求めることができる。ただし基準体系の Λ と β_{eff} が測定体系とほぼ同じであると近似できなければならない。基準体系のドル単位の未臨界度を $(-\rho_0)/\beta_{\text{eff}}$ 、即発中性子減衰定数を α_0 とすると、

$$\frac{(-\rho)}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{\alpha}{\alpha_0} \frac{(-\rho_0)}{\beta_{\text{eff}}} + \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} \quad (2-26)$$

により測定体系のドル単位の未臨界度 $(-\rho)/\beta_{\text{eff}}$ を得ることができる。さらに数値計算により β_{eff} を求めれば、得られたドル単位の未臨界度を絶対値に換算することができる。

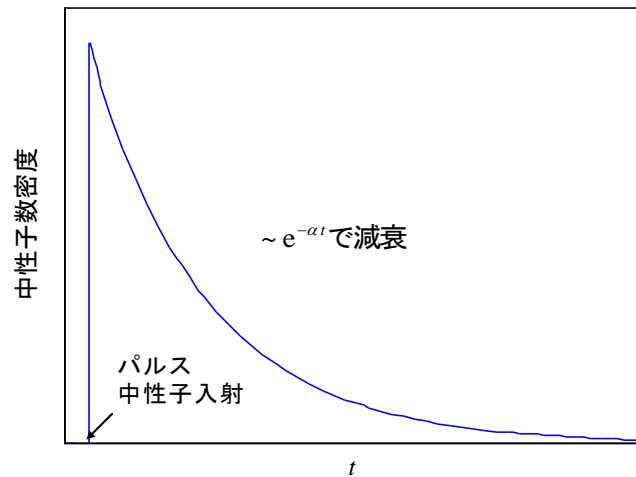


Fig. 2-2 パルス中性子法における中性子数密度の時間変化

2) 面積比法

次に Sjöstrand により提案された面積比法⁵⁾について説明する。この手法では、未臨界体系にパルス中性子を周期的に打ち込み続けることで、中性子数密度の即発中性子成分と遅発中性子成分の時間積分量の比（面積比）からドル単位の未臨界度を得ることができる。

周波数 f でパルス状の中性子が打ち込まれ、十分時間が経過して体系内の遅発中性子先行核密度が一定とみなせるとする。時刻 $t=0$ にデルタ関数状に n_0 個の中性子が打ち込まれたとすると、1 点炉動特性方程式より $0 \leq t < 1/f$ における中性子数密度の時間変化が以下のように得られる。

$$n(t) = n_p(t) + n_d \quad (2-27)$$

$$n_p(t) = \frac{n_0}{1 - e^{-\alpha/f}} e^{-\alpha t} \quad (2-28)$$

$$n_d = \frac{n_0}{\alpha/f} \frac{\beta_{\text{eff}}}{(-\rho)} \quad (2-29)$$

ただし $n_p(t)$ は中性子数密度の即発中性子成分、 n_d は中性子数密度の遅発中性子成分を表す。上式を用いることでより、 $0 \leq t < 1/f$ における中性子数密度の即発・遅発中性子成分の時間積分量 A_p 、 A_d が以下のように得られる。

$$A_p = \int_0^{1/f} dt n_p(t) = \frac{n_0}{\alpha} \quad (2-30)$$

$$A_d = \int_0^{1/f} dt n_d = \frac{n_0}{\alpha} \frac{\beta_{\text{eff}}}{(-\rho)} \quad (2-31)$$

従って、Fig. 2-3 のように中性子数密度の即発・遅発中性子成分の時間積分 A_p 、 A_d の比を取ること、以下のようにドル単位の未臨界度を求めることができる。

$$\frac{(-\rho)}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{A_p}{A_d} \quad (2-32)$$

さらに数値計算により β_{eff} を求めれば、得られたドル単位の未臨界度を絶対値に換算することができる。

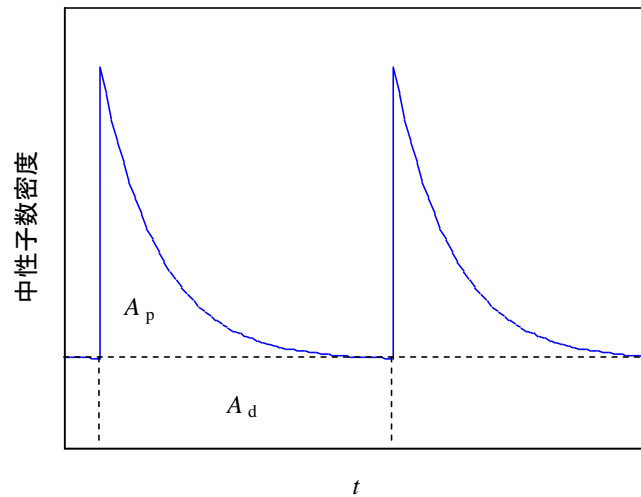


Fig. 2-3 面積比法における中性子数密度の時間変化

未臨界度測定として以上で述べたパルス中性子法を用いるためには、パルス中性子源を発生させるために加速器が必要不可欠である。即発中性子減衰定数 α を利用して未臨界度を評価する場合には、数値計算により Λ と β_{eff} を求めるか、未臨界度が既知である基準体系で得られた即発中性子減衰定数 α_0 を利用するなどして情報を補う必要がある。面積比法を用いた場合は、中性子検出数の時間変化を測定するだけでドル単位の未臨界度を得ることができる。

2.5.2 中性子源挿入法

中性子源挿入法とは、未臨界体系に外部中性子源を瞬間的に挿入し、その中性子数密度の時間変化を測定することで未臨界度を得る手法である。中性子源挿入法による未臨界度測定法としては、1)即発中性子減衰定数 α を利用する手法、2)中性子数密度の飽和値を利用する手法、3)積分法の3つの方法が挙げられる。

未臨界体系に時刻 $t=0$ に瞬間的に線源強度 S の外部中性子源が挿入されたとすると、1点炉動特性方程式より中性子数密度の時間変化が以下のように得られる。

$$n(t) = n_{\infty} \left(1 - \sum_{j=1}^7 b_j e^{-\omega_j t} \right) \quad (2-33)$$

$$n_{\infty} = \frac{S \Lambda}{(-\rho)} \quad (2-34)$$

$$b_j = \frac{(-\rho)}{\omega_j \left\{ \Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i} \lambda_i}{(\lambda_i - \omega_j)^2} \right\}} \quad (2-35)$$

ただし n_{∞} は $t \rightarrow \infty$ における中性子数密度の飽和値を表し、 ω_j は(2-23)式を満足する時定数である。

1) 即発中性子減衰定数 α を利用する手法

即発中性子成分の時間領域（時間のオーダーが $\sim 1/\alpha$ ）を考えたとすると、中性子数密度 $n(t)$ は以下のように近似することができる。

$$n(t) \cong n_{p,\infty} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (2-36)$$

$$n_{p,\infty} = \frac{(-\rho)n_\infty}{\beta_{\text{eff}} - \rho} \quad (2-37)$$

ただし $n_{p,\infty}$ は中性子数密度の即発中性子成分の飽和値を表す。従って、Fig. 2-4 のように外部中性子源を挿入した後の中性子数密度の時間変化を測定し、(2-36)式をフィッティングすることで、即発中性子減衰定数 α を得ることができる。あとはパルス中性子法の場合と同様に、得られた α を換算することで未臨界度を得ることができる。

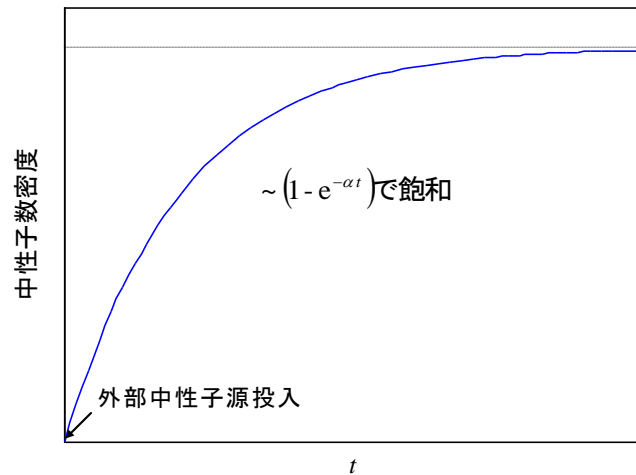


Fig. 2-4 中性子源投入法における中性子数密度の時間変化
(即発中性子成分の時間領域)

2) 中性子数密度の飽和値を利用する手法

外部中性子源を瞬間的に挿入した際に、中性子数密度の即発中性子成分は時間とともに急速に飽和するが、それに比べると遅発中性子成分は非常にゆっくりと飽和する。ここで中性子数密度の即発中性子成分の飽和値 $n_{p,\infty}$ は(2-37)式で表され、これを変形することにより $n_{p,\infty}$ と n_∞ の間に以下のような関係式を得ることができる。

$$\frac{(-\rho)}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{n_{p,\infty}}{n_\infty - n_{p,\infty}} \quad (2-38)$$

従って Fig. 2-5 ように、中性子数密度の時間変化から即発中性子成分の飽和値 $n_{p,\infty}$ を測定し、十分時間が経過した後の定常状態における中性子数密度 n_∞ を測定することで、上式を用いてドル単位の未臨界度を得ることができる。

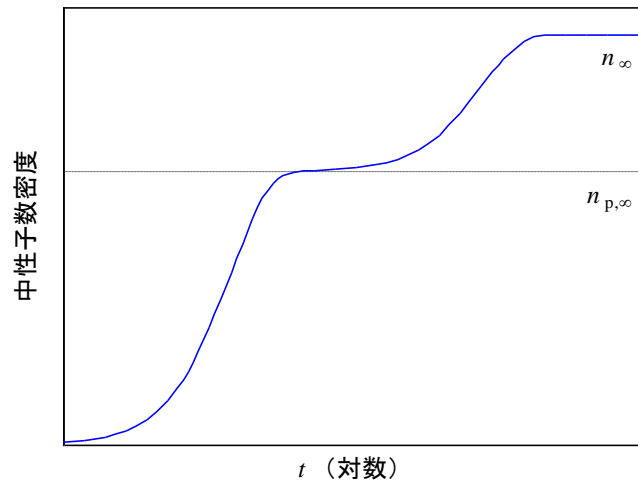


Fig. 2-5 中性子源投入法における中性子数密度の時間変化
(遅発中性子成分の時間領域まで)

3) 積分法

外部中性子源挿入時刻 $t=0$ から、十分時間が経過して体系内の中性子数密度が飽和するまでの時間について、中性子数密度の飽和値 n_∞ から $n(t)$ を引いた $n_\infty - n(t)$ の時間積分を求めると以下のようなになる。

$$\int_0^\infty dt(n_\infty - n(t)) = \frac{n_\infty}{(-\rho)} \left(\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i}}{\lambda_i} \right) \quad (2-39)$$

従って、外部中性子源を挿入してから中性子数密度が飽和するまで体系内の中性子数密度を測定し、 $n_\infty - n(t)$ の時間積分と求めることで、以下のようにドル単位の未臨界度を得ることができる。

$$\frac{(-\rho)}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{n_\infty}{\int_0^\infty dt(n_\infty - n(t))} \left(\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i}/\beta_{\text{eff}}}{\lambda_i} \right) \quad (2-40)$$

上式において、遅発中性子先行核の崩壊定数 λ_i および相対収率 $\beta_{\text{eff},i}/\beta_{\text{eff}}$ の値には文献値を利用することができ、さらに中性子生成時間 Λ が無視できる場合もあり、その時には中性子検出数の測定のみでドル単位の未臨界度を得ることができる。

中性子源挿入法では、未臨界体系から外部中性子源を瞬間的に挿入することができるメカニズムが必要不可欠である。即発中性子減衰定数 α を利用して未臨界度を評価する場合には、未臨界度に換算するためには数値計算等が必要である。中性子数密度の飽和値を利用する場合には、中性子検出数の時間変化を測定し即発中性子成分を抽出することで、ドル単位の未臨界度を得ることができる。積分法を利用する場合にも、条件によっては中性子検出数の測定のみでドル単位の未臨界度を得ることができる。

2.5.3 中性子源引抜法

中性子源引抜法とは、上で述べた中性子挿入法とは正反対に、外部中性子源を投入して定常状態に達した未臨界体系から中性子源を瞬間的に引き抜き、その中性子数密度の時間変化を測定することで未臨界度を得る手法である^[13]。中性子源引抜法による未臨界度測定法としては、1)即発中性子減衰定数 α を利用する手法、2)外挿法 3)積分法、の3つの方法が挙げられる。

未臨界体系に線源強度 S の外部中性子源が投入されて、体系内の中性子束密度が定常状態に達したとする。時刻 $t=0$ に瞬間的に外部中性子源が未臨界体系から引き抜かれたとすると、1点炉動特性方程式より中性子数密度の時間変化が以下のように得られる。

$$n(t) = n_0 \sum_{j=1}^7 c_j e^{-\omega_j t} \quad (2-41)$$

$$n_0 = \frac{S \Lambda}{(-\rho)} \quad (2-42)$$

$$c_j = \frac{\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i}}{\lambda_i - \omega_j}}{\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i} \lambda_i}{(\lambda_i - \omega_j)^2}} = \frac{(-\rho)}{(-\rho) + \omega_j^2 \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i}}{(\lambda_i - \omega_j)^2}} \quad (2-43)$$

ただし n_0 は定常状態における中性子数密度であり、 ω_j は(2-23)式を満足する時定数である。

1) 即発中性子減衰定数 α を利用する手法

即発中性子成分の時間領域において、中性子数密度 $n(t)$ は以下のように近似することができる。

$$n(t) \cong \frac{n_0}{\beta_{\text{eff}} - \rho} (\beta_{\text{eff}} - \rho e^{-\alpha t}) \quad (2-44)$$

従って、Fig. 2-6のように外部中性子源を引き抜いた後の中性子数密度の時間変化を測定し、高次モード成分が十分減衰した時間領域において(2-44)式をフィッティングすることで、即発中性子減衰定数 α を得ることができる。あとは得られた α を換算することで未臨界度を得ることができる。

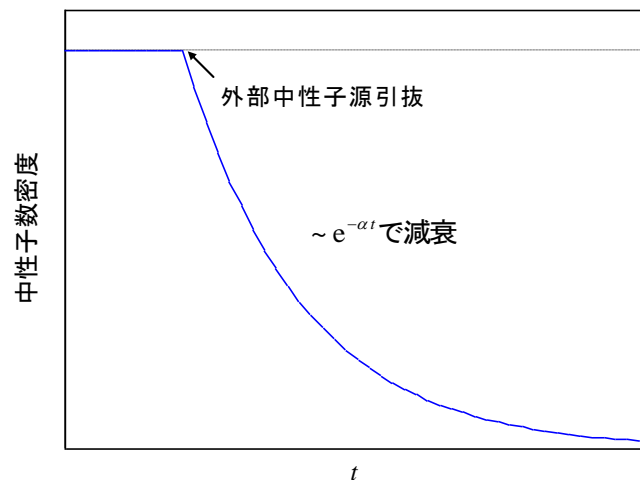


Fig. 2-6 中性子源引抜法における中性子数密度の時間変化
(即発中性子成分の時間領域)

2) 外挿法

外部中性子源を瞬間的に引き抜いた際、中性子数密度の即発中性子成分は急速に減衰するが、遅発中性子成分は即座に変化しない。そのため中性子源引抜の前後で中性子数密度がステップ状に変化するとみなすことができる（即発跳躍近似）。外部中性子源を引き抜いた直後の中性子数密度 n_1 は、(2-44)式を利用することで以下のように得ることができる。

$$n_1 \cong \frac{\beta_{\text{eff}} n_0}{\beta_{\text{eff}} - \rho} \quad (2-45)$$

従って外部中性子源引抜前後の中性子数密度 n_0 、 n_1 の比より、以下のようにドル単位の未臨界度を得ることができる。

$$\frac{(-\rho)}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{n_0}{n_1} - 1 \quad (2-46)$$

実際には Fig. 2-7 のように、外部中性子源を引き抜いた後、中性子数密度の遅発中性子成分はゆっくりと減衰するので、遅発中性子領域の減衰曲線を外部中性子源引抜時刻 $t=0$ に外挿することで n_1 が推定される。

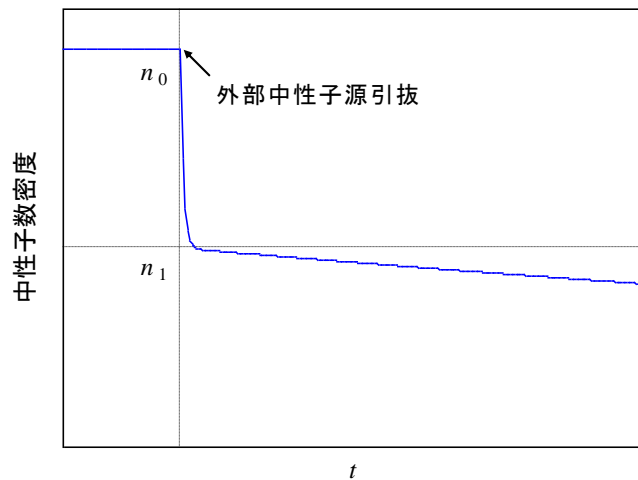


Fig. 2-7 中性子源引抜法における中性子数密度の時間変化
(遅発中性子成分の時間領域まで)

3) 積分法

外部中性子源引抜時刻 $t=0$ から、十分時間が経過して体系内の中性子数密度がゼロになるまでの中性子数密度の時間積分を求めると以下ようになる。

$$\int_0^{\infty} dt n(t) = \frac{n_0}{(-\rho)} \left(\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i}}{\lambda_i} \right) \quad (2-47)$$

従って、外部中性子源引抜前の中性子数密度 n_0 と、引抜後に中性子数密度がゼロになるまでの中性子数密度の時間積分を測定することで、以下のようにドル単位の未臨界度を得ることができる。

$$\frac{(-\rho)}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{n_0}{\int_0^{\infty} dt n(t)} \left(\Lambda + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_{\text{eff},i}}{\lambda_i} \right) \quad (2-48)$$

上式において、遅発中性子先行核の崩壊定数 λ_i および相対収率 $\beta_{\text{eff},i}/\beta_{\text{eff}}$ の値には文献値を利用することができ、さらに中性子生成時間 Λ が無視できる場合もあり、その時には中性子検出数の測定のみでドル単位の未臨界度を得ることができる。

中性子源引抜法では、中性子源挿入法同様に、未臨界体系から外部中性子源を瞬間的に引き抜くことができるメカニズムが必要となる。即発中性子減衰定数 α を利用して未臨界度を評価する場合には、未臨界度に換算するためには数値計算等が必要である。外挿法を利用する場合には、中性子検出数の時間変化を測定することでドル単位の未臨界度を得ることができる。積分法を利用する場合にも、条件によっては中性子検出数の測定のみでドル単位の未臨界度を得ることができる。

2.6 炉雑音解析を用いた未臨界度測定法

今までに述べた未臨界度測定法は中性子輸送方程式に基づいている。中性子輸送方程式は体系内の中性子数の期待値に着目した方程式である。従って、今までに述べた未臨界度測定法は体系内の中性子数の期待値を利用した手法であると言える。

これに対して、炉雑音解析は体系内の中性子数の時間的ゆらぎを利用する手法であると言える。Fig. 2-8 で表されるように、実際に体系内の中性子数の時間変化をよく観察すると、中性子数は常に一定ではなく、ある値の周りに時間とともに絶えずゆらいでいる。このような中性子数の時間的ゆらぎを炉雑音と呼ぶ。炉雑音が生じる原因としては様々な原因が挙げられるが、核的要因として外部中性子源の崩壊・中性子と原子核の核反応といった確率的事象が挙げられる。炉雑音の原因として核的要因が支配的な場合には、炉雑音を解析することで体系の核的性質、すなわち中性子の増倍に関する情報を抽出することができる。炉雑音解析では中性子数の時間的ゆらぎさえ評価できれば良いので、体系に動的変化を加える必要がなく定常状態で測定することができる。

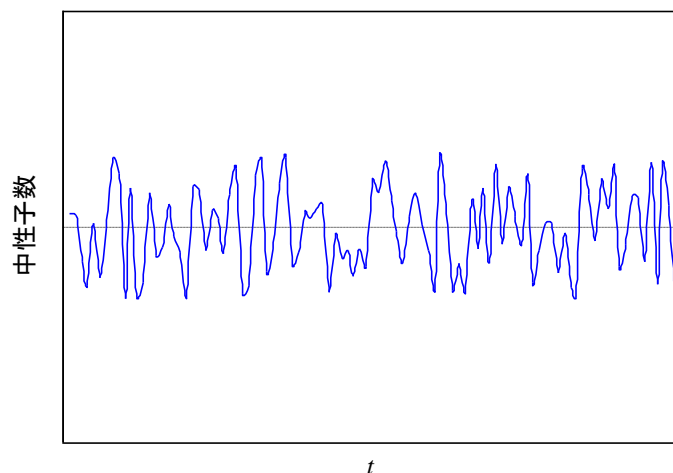


Fig. 2-8 炉雑音の概念図

2.6.1 Feynman- α 法

Feynman- α 法は Feynman により提案された手法であり、分散対平均法とも呼ばれる^[6,7]。Feynman- α 法では、検出時間幅 T の間に検出された中性子数の分散と平均の比から二次相関量 Y 値を評価し、検出時間幅 T に対する Y 値の変化を測定することで即発中性子減衰定数 α を求め、未臨界度を得ることができる。

未臨界体系に外部中性子源が投入されて、体系内の中性子束密度が定常状態に達したとする。この未臨界体系に対して、検出時間幅 T だけ体系内の中性子を検出し、検出された中性子数を $C(T)$ とする。この測定を繰り返すことで、検出時間幅 T の間に検出された中性子数の平均 $m(T)$ 及び分散 $v(T)$ を評価することができる。

$$m(T) \equiv \langle C(T) \rangle \quad (2-49)$$

$$v(T) \equiv \langle (C(T) - m(T))^2 \rangle \quad (2-50)$$

ただし上式においてブラケット $\langle \rangle$ は期待値を表す。こうして測定された中性子検出数の平均と分散を用いて、二次相関量 Y 値が以下のように定義される。

$$Y(T) \equiv \frac{v(T)}{m(T)} - 1 \quad (2-51)$$

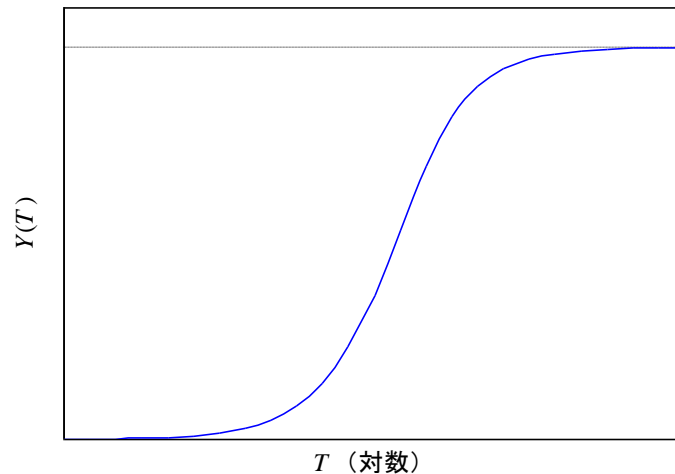
中性子検出数の確率分布がポアソン分布に従う場合には、中性子検出数の分散と平均が等しくなるので、 Y 値はゼロとなる。一方、中性子検出数の分散が平均より大きい場合には Y 値は正の値になる。従って二次相関量 Y 値は、検出された中性子数の分散がポアソン分布の場合に比べて相対的にどの程度ずれているかを表す量であると言える。核分裂性物質を含んだ増倍体系では、体系内で中性子が核分裂反応を起こすことにより、その連鎖反応系に属する中性子があたかも群を成している。すなわち中性子数の時間的変動を見た場合、連鎖反応系が存在する部分で中性子数が密となり、中性子数の時間的疎密の差が大きくなる。従って、増倍体系の中性子検出数の分散は平均よりも大きくなり、増倍体系では Y 値は正の値になる。

詳しい導出は3章で述べるが、1点炉近似、エネルギー1群、即発中性子成分のみを考慮という条件の下で、検出時間幅 T に対する Y 値の理論式が以下のように得られる。

$$Y(T) = Y_{\infty} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \quad (2-52)$$

ただし Y_{∞} は $T \rightarrow \infty$ における Y 値の飽和値を表す。従って Fig. 2-9 のように、検出時間幅 T に対する Y 値の変化を測定し、(2-52)式をフィッティングすることで、即発中性子減衰定数 α を得ることができる。あとは得られた α を換算することで未臨界度を得ることができる。

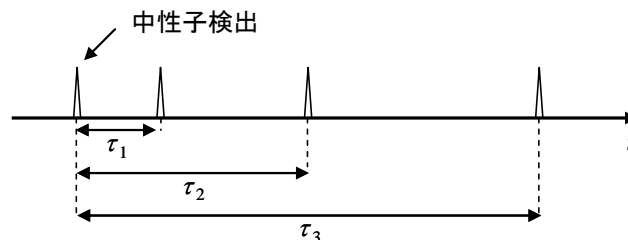
Feynman- α 法では、定常状態の未臨界体系に対して中性子検出数を測定するだけで即発中性子減衰定数 α という動特性パラメータを得ることができる。ただし α を得るためには Y 値の立ち上がりの部分を測定する必要があり、体系の α が大きい場合には検出時間幅 T をそれに応じて十分小さくしなければならない。また測定により得られるのは即発中性子減衰定数 α なので、それを未臨界度に換算するために数値計算等が必要となる。

Fig. 2-9 検出時間幅 T に対する二次相関量 Y 値の変化

2.6.2 Rossi- α 法

Rossi- α 法とは、検出された中性子の時刻情報より検出時間間隔 τ の頻度分布を求め、得られた検出時間間隔の頻度分布から即発中性子減衰定数 α を求め未臨界度を得る手法である^[14,15]。

Feynman- α 法同様に、未臨界体系に外部中性子源が投入されて、体系内の中性子束密度が定常状態に達したとする。この未臨界体系に対して体系内の中性子の検出を行い、検出時刻情報を測定する。測定された検出時刻情報より、Fig. 2-10 で示されたように、1 個の中性子が検出された後に任意の中性子が検出されるまでの時間間隔 τ を調べ、その頻度分布 $P(\tau)d\tau$ を測定する。

Fig. 2-10 検出時間間隔 τ

詳しい導出は省略するが、1 点炉近似、エネルギー1 群、即発中性子成分のみを考慮という条件下で導出された 2 時点検出確率 (3 章参照) を用いることで、検出時間間隔 τ の頻度分布 $P(\tau)d\tau$ の理論式が以下のように求められる。

$$P(\tau)d\tau = (P_0 e^{-\alpha\tau} + C_R) d\tau \quad (2-53)$$

ただし C_R は平均計数率を表す。上式より頻度分布 $P(\tau)d\tau$ は $\tau = 0$ の時には最大値 $(P_0 + C_R)d\tau$ を取り、 $\tau \rightarrow \infty$ において C_R に収束するのが分かる。これは中性子の検出が行われた直後に中性子が検出される確率が高いことを意味する。言い換えると、増倍体系では連鎖反応系に属する中性子が群を成すために、中性子が検出された時間付近では中性子数が時間的に密である可能性が高いことを意味する。以上より、Fig. 2-11 のように検出時間間隔 τ の頻度分布 $P(\tau)d\tau$ を測定し(2-53)

式をフィッティングすることで、即発中性子減衰定数 α を得ることができる。あとは得られた α を換算することで未臨界度を得ることができる。

Feynman- α 法同様に、Rossi- α 法でも定常状態の未臨界体系に対して中性子検出数を測定するだけで即発中性子減衰定数 α という動特性パラメータを得ることができる。ただし検出時刻情報が必要であり、体系の α が大きい場合にはそれに応じて時間分解能が小さくなければならない。また測定により得られるのは即発中性子減衰定数 α なので、それを未臨界度に換算するために数値計算等が必要となる。

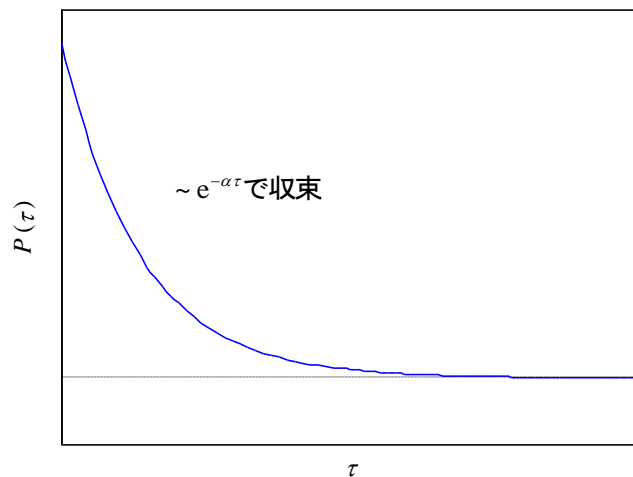


Fig. 2-11 検出時間間隔 τ に対する頻度分布 $P(\tau)$ の変化

2.6.3 周波数解析

周波数解析では、未臨界体系のパワースペクトル密度を測定し、得られたパワースペクトル密度から即発中性子減衰定数 α を求め未臨界度を得る手法である^[15,16]。

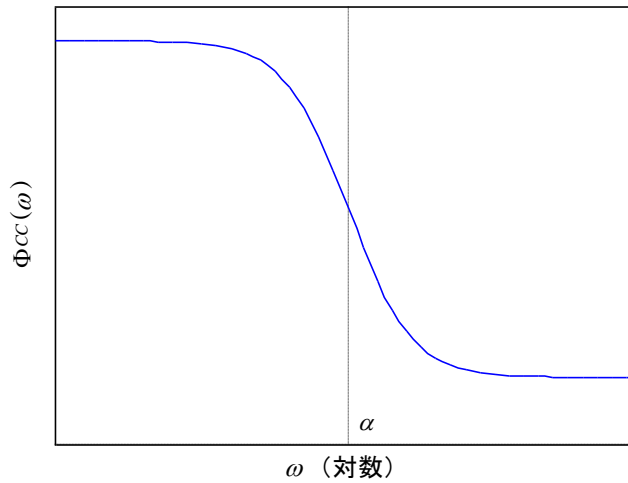
外部中性子源が投入されて体系内の中性子束密度が定常状態に達した未臨界体系に対して、中性子検出器により体系内の中性子数の時間変化を測定する。得られた中性子検出数 C の時間変化から自己パワースペクトル密度 $\Phi_{cc}(\omega)$ を求める。

詳しい導出は省略するが、1点炉近似、エネルギー1群という条件下で自己パワースペクトル密度 $\Phi_{cc}(\omega)$ の理論式を導出し、周波数 ω が即発中性子減衰定数 α の近傍とすることで自己パワースペクトル密度 $\Phi_{cc}(\omega)$ の関数形を以下のように近似することができる。

$$\Phi_{cc}(\omega) = \frac{A}{\omega^2 + \alpha^2} + B \quad (2-54)$$

ただし A 、 B は定数である。従って、Fig. 2-12のように自己パワースペクトル密度 $\Phi_{cc}(\omega)$ を測定し(2-54)式をフィッティングすることで、折点周波数に対応する即発中性子減衰定数 α を得ることができる。あとは得られた α を換算することで未臨界度を得ることができる。

周波数解析でも定常状態の未臨界体系に対して中性子検出数の測定を行うだけで即発中性子減衰定数 α という動特性パラメータを得ることができる。ただし測定により得られるのは即発中性子減衰定数 α なので、それを未臨界度に換算するために数値計算等が必要となる。

Fig. 2-12 周波数 ω に対する自己パワースペクトル密度 $\Phi_{cc}(\omega)$ の変化

2.6.4 Mihalczo 法

Mihalczo 法は Mihalczo により提案された手法であり、Cf 線源内蔵検出器という特殊な装置を必要とする^[8]。この Cf 線源内蔵検出器は、Cf の自発核分裂による核分裂片を電離箱で検出することにより、自発核分裂で発生する中性子の放出時刻情報を得ることができる装置である。Mihalczo 法では、1 個の Cf 内蔵検出器と 2 個の中性子検出器の間のパワースペクトル密度を測定し、得られたパワースペクトル密度からスペクトル比を評価し、このスペクトル比を換算することで未臨界度の絶対値を測定することができる。

外部中性子源が投入されて体系内の中性子束密度が定常状態に達した未臨界体系に対して、1 個の Cf 線源内蔵検出器(#1)と 2 個の中性子検出器(#2, #3)を用いて、パワースペクトル密度 $G_{11}(\omega)$ 、 $G_{12}(\omega)$ 、 $G_{13}(\omega)$ 、 $G_{23}(\omega)$ を測定する。ただし $G_{11}(\omega)$ は Cf 線源内蔵検出器の自己パワースペクトル密度、 $G_{12}(\omega)$ は Cf 線源内蔵検出器と中性子検出器#2 の出力間の相互パワースペクトル密度、 $G_{13}(\omega)$ は Cf 線源内蔵検出器と中性子検出器#3 の出力間の相互パワースペクトル密度、 $G_{23}(\omega)$ は中性子検出器#2、#3 の出力間の相互パワースペクトル密度をそれぞれ表す。以上のパワースペクトル密度から、以下で定義されるスペクトル比 S_R を求める。

$$S_R \equiv \frac{G_{12}^*(\omega)G_{13}(\omega)}{G_{11}(\omega)G_{23}(\omega)} \quad (2-55)$$

ただしアスタリスク*は複素共役を意味する。このように測定されたスペクトル比 S_R から、以下のように未臨界度の絶対値を得ることができる。

$$(-\rho) = \frac{C_1 S_R}{1 - C_2 S_R} \quad (2-56)$$

ただし C_1 、 C_2 はスペクトル比を未臨界度に換算するための換算係数である。

Mihalczo 法には未臨界度の絶対値が評価できるという利点がある。ただし、Cf 線源内蔵検出器という特殊な装置を必要とする。また測定により得られたスペクトル比 S_R を未臨界度に換算するためには、換算係数 C_1 、 C_2 をあらかじめ数値計算で求めておく必要がある。

2.6.5 三次中性子相関法

本研究で着目した三次中性子相関法は、古橋により提案された炉雑音解析の一つであり、上で述べた Feynman- α 法をさらに発展させた手法である^[9]。三次中性子相関法では、Feynman- α 法同様に、検出時間幅 T の間に検出された中性子の二次相関量 Y 値を測定し、それに加えて中性子検出数の三次モーメント (third order central moment) から同様に定義される三次相関量 X 値を測定する。こうして得られた Y 、 X 値から検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値を推定し、得られた Y 、 X 値の飽和値を換算することで未臨界度を得ることができる。

三次中性子相関法を説明するために、二次相関量 Y 値の理論式をもう一度見直すことにする。1 点炉近似、エネルギー 1 群、遅発中性子を無視という条件の下、 Y 値の理論式は以下のように得られる。

$$Y(T) = Y_{\infty} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \quad (2-52)$$

$$\alpha = v \langle \nu \rangle \Sigma_f (-\rho) \quad (2-57)$$

$$Y_{\infty} = \frac{\Sigma_d \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\Sigma_f \langle \nu \rangle^2} \frac{1 + \delta_2 (-\rho)}{(-\rho)^2} \quad (2-58)$$

$$\delta_2 \equiv \frac{\langle \nu \rangle \langle q(q-1) \rangle}{\langle q \rangle \langle \nu(\nu-1) \rangle} \quad (2-59)$$

ただし、 v は中性子速度、 Σ_f は巨視的核分裂断面積、 Σ_d は巨視的検出断面積、 ν は核分裂反応 1 回当りに発生する中性子数、 q は外部中性子源の崩壊 1 回当りに発生する中性子数を表す。ここで Y 値の飽和値 Y_{∞} に注目すると、 Y_{∞} には未臨界度 $(-\rho)$ の情報が含まれているのが分かる。しかし Y_{∞} は未知数として Σ_f 、 Σ_d も含むため、たとえ ν 、 q のモーメント量が既知だとしても、 Y_{∞} のみから未臨界度を決定することはできない。

そこで足りない情報を補うために、古橋により三次相関量 X 値が以下のように定義された。

$$X(T) \equiv \frac{s(T)}{m(T)} - 3 \frac{v(T)}{m(T)} + 2 \quad (2-60)$$

ただし $s(T)$ は検出時間幅 T の間に検出された中性子数の三次モーメント (third order central moment) を表す。

$$s(T) \equiv \langle (C(T) - m(T))^3 \rangle \quad (2-61)$$

三次相関量 X 値の定義式を変形すると

$$X(T) = \left(\frac{s(T)}{m(T)} - 1 \right) - 3 \left(\frac{v(T)}{m(T)} - 1 \right) \quad (2-62)$$

となる。中性子検出数の確率分布がポアソン分布に従う場合には、分散同様に、三次モーメントも平均に等しくなる。よって三次相関量 X 値も、二次相関量 Y 値同様に、中性子検出数の三次モーメントがポアソン分布の場合に比べて相対的にどの程度ずれているかを表す量であると言える。詳しい導出は 3 章で述べるが、三次相関量 X 値の理論式も、 Y 値の理論式を導出する場合と全く同じ条件の下、以下のように導出される。

$$X(T) = X_{2\infty} \left(1 + e^{-\alpha T} - 2 \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) + X_{3\infty} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha T} + e^{-2\alpha T}}{2\alpha T} \right) \quad (2-63)$$

$$X_{2\infty} = 3 \left(\frac{\Sigma_d \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\Sigma_f \langle \nu \rangle^2} \right)^2 \frac{1 + \delta_2(-\rho)}{(-\rho)^4} \quad (2-64)$$

$$X_{3\infty} = \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_f} \right)^2 \frac{\langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle}{\langle \nu \rangle^3} \frac{1 + \delta_3(-\rho)}{(-\rho)^3} \quad (2-65)$$

$$\delta_3 \equiv \frac{\langle \nu \rangle \langle q(q-1)(q-2) \rangle}{\langle q \rangle \langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle} \quad (2-66)$$

ただし $X_{2\infty}$ は X 値の二又成分 (ν 、 q の二次階乗モーメントを含む成分) の飽和値、 $X_{3\infty}$ は X 値の三又成分 (ν 、 q の三次階乗モーメントを含む成分) の飽和値を表す。検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における X 値の飽和値 X_∞ は、これら $X_{2\infty}$ と $X_{3\infty}$ の和で表される。

$$X_\infty = X_{2\infty} + X_{3\infty} \quad (2-67)$$

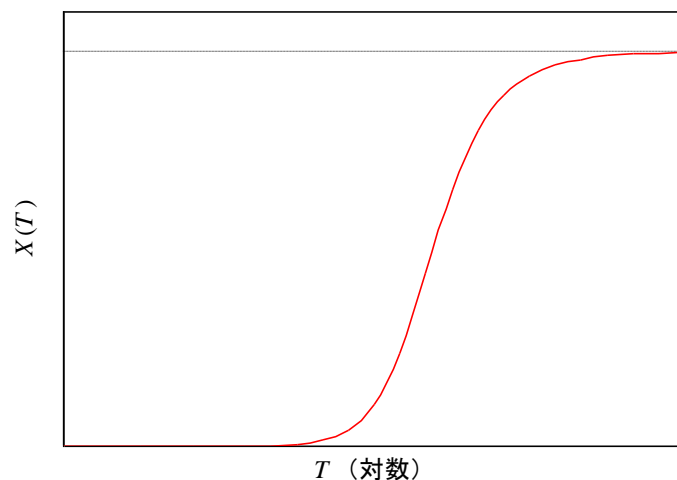
ここで $X_{2\infty}$ と $X_{3\infty}$ に注目すると、 Y 値の飽和値 Y_∞ 同様に、未臨界度 $(-\rho)$ の情報が含まれているのが分かる。従って、未臨界度 $(-\rho)$ を介して Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の間に以下のような関係式を得ることができる。

$$\frac{X_\infty}{Y_\infty^2} = \frac{3}{1 + \delta_2(-\rho)} + F \frac{\{1 + \delta_3(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_2(-\rho)\}^2} \quad (2-68)$$

$$F \equiv \frac{\langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle \langle \nu \rangle}{\langle \nu(\nu-1) \rangle^2} \quad (2-69)$$

従って上式より、 ν 、 q のモーメント量が既知であれば、 Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ を推定することで未臨界度 $(-\rho)$ を得ることができる。具体的には Fig. 2-9 や Fig. 2-13 のように、検出時間幅 T に対する Y 、 X 値の変化を測定し、(2-52)、(2-63) 式をフィッティングにより Y_∞ 、 X_∞ を決定することで、未臨界度 $(-\rho)$ を求めることができる。

三次中性子相関法では、定常状態の未臨界体系に対して中性子検出数の測定を行うだけで未臨界度 $(-\rho)$ を得ることができる。未臨界度 $(-\rho)$ を得るためには ν 、 q のモーメント量が既知でなければならないが、例えば Diven^[10] により測定された結果を用いることができる。ただし三次中性子相関法では、 Y 、 X 値を正確に評価する必要があり、特に三次モーメントを統計精度良く評価するためにはかなりの測定時間 (だいたい 1 時間程度のオーダー) が必要となる。また三次中性子相関法に現れる空間・中性子エネルギー等の効果については今までに議論されておらず、実際の測定に適用するためには上で無視した空間・中性子エネルギー等の効果について検討する必要がある。

Fig. 2-13 検出時間幅 T に対する三次相関量 X 値の変化

2.7 本章のまとめ

以上で述べた未臨界度測定法の利点・欠点を Table 2-1 でまとめる。Table 2-1 よりかるように、本研究で着目している三次中性子相関法は、他の未臨界度測定手法と比較すると実時間測定には向かないという欠点があるものの、中性子検出器以外に特に特殊な装置を必要とせず、中性子の計数を測定するだけで未臨界度の絶対値を測定することができるという利点がある。

ただし筆者が過去に行った卒業研究において、三次中性子相関法には以下のような問題点があることが明らかになった^[14]。

- 1) 実際の測定では測定時間が限られるため、 Y 、 X 値を測定するのに必要となる分散および三次モーメントは有限個のデータから推定される。このデータ数が十分多くないと、真の分散、三次モーメントを正しく推定することができない。その結果、 Y 、 X 値が真値に比べて過小評価されてしまう。特に Y 、 X 値を測定する際にバンチング処理を用いる場合、検出時間幅 T が大きくなるにつれデータ数が少なくなるため、結果的に T が大きくなっても Y 、 X 値が飽和せず、むしろ落ち込んでしまう。
- 2) 従来の三次中性子相関法の解析公式は 1 点炉近似・エネルギー 1 群で導出されている。しかし実際の未臨界度測定に三次中性子相関法を適用するためには、空間・中性子エネルギーの効果をも十分に考慮する必要がある。

以上で述べた課題を解決するために、まずは三次中性子相関法で用いる Y 、 X 値の理論式の導出を見直すことにした。

次で述べる第 3 章では、

- ① 空間、中性子エネルギー、方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式
- ② データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式

を、物理的直感法に基づいて新たに導出する。こうして導出された Y 、 X 値の理論式より、空間、中性子エネルギー、方向依存性を考慮に入れた、基本モード近似による三次中性子相関法を新たに提案する。

また第 4 章では、中性子検出確率のバランス方程式に基づいて、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論を導出する。得られた Y 、 X 値の一般理論を用いることで、決定論的手法により Y 、 X 値を数値計算できることを示す。このように、決定論的手法により Y 、 X 値を数値計算することができれば、実際の測定で得られた Y 、 X 値に現れる空間効果について定量的に評価することが可能となる。

Table 2-1 各未臨界度測定法の利点、欠点

未臨界度測定法		定常状態 で測定可能	測定装置 の簡便さ	測定時間	未臨界度 絶対評価
静的手法	中性子源増倍法	○	○	○	×注7
	指数実験法	○	○	△注5	×注8
動的手法	パルス中性子法	×注1	×注2	○	△注9
	中性子源挿入法	×注1	△注3	○	△注9
	中性子源引抜法	×注1	△注3	○	△注9
炉雑音解析	Feynman- α 法	○	○	○	×注10
	Rossi- α 法	○	○	○	×注10
	周波数解析	○	○	○	×注10
	Mihalcz法	○	×注4	○	○注11
	三次中性子相関法	○	○	×注6	○注12

注1：体系に動的変化を加える必要がある

注2：パルス中性子を発生させるために加速器が必要

注3：外部中性子源を瞬間的に挿入する、もしくは引き抜くメカニズムが必要

注4：Cf線源内蔵検出器という特殊な装置が必要

注5：中性子束空間分布を測定するために、複数の地点で中性子の検出を行う必要がある

注6：中性子検出数のゆらぎを統計精度良く測定するために、かなりの測定時間が必要

注7：未臨界度が既知である基準体系の計数率が必要

注8：バックリング - 未臨界度換算係数 K が必要

注9：ドル単位の未臨界度を測定可能

注10：即発中性子減衰定数 α を換算する必要がある

注11：スペクトル比 S_R を換算することで未臨界度の絶対値を評価可能

注12：核分裂および外部中性子源で発生する中性子数 ν 、 q の階乗モーメントとして文献値を利用することで未臨界度の絶対値を評価可能

Chapter 3

物理的直感法に基づいた Y 、 X 値の理論式導出

3.1 本章の目的・概要

前章で述べたように、三次中性子相関法には解決すべき課題が残されている。本章ではその課題を解決するために、空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式、およびデータ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を、物理的直感法に基づいて導出する^[6, 17]。

Y 、 X 値の理論式を導出するために、まず固有関数展開を利用して、角度中性子数密度のグリーン関数を求める。次に、求められたグリーン関数を用いて、物理的直感法により 1~3 時点検出確率を求める。こうして得られた 1~3 時点検出確率を用いることで、中性子検出数の階乗モーメントの期待値を求めることができ、最終的に Y 、 X 値の理論式を導出することができる。

さらに導出された Y 、 X 値の理論式を利用して、空間、中性子エネルギー、方向依存性を考慮に入れた、基本モード近似による三次中性子相関法を新たに提案する。

3.2 理論式導出条件

以下で導出する理論式の条件を示す。

- ・ 実効増倍率 k_{eff} 、未臨界度 ($-\rho$) の未臨界体系。体系の全領域を V 、領域表面を S とする。領域表面 S の外向き法線ベクトルを \mathbf{n} とし、真空境界条件を満足する
- ・ 空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮。
- ・ 核分裂で発生する中性子は全て即発中性子とする。すなわち遅発中性子割合 β がゼロとする。
- ・ 体系内に外部中性子源が強度空間分布 $S(\mathbf{r})$ で存在。
- ・ 巨視的検出反応断面積 $\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ の中性子検出器が体系内に 1 個存在する。ただし中性子検出は捕獲反応を利用するものとする。

3.3 物理的直感法

物理的直感法とは、核分裂により生じた連鎖反応の家系を想像して、どのような連鎖反応の過程を経て中性子が検出されるか (どのように連鎖反応家系が枝分かれして中性子が検出されるか) を直感的に考えることで、1 時点検出確率 $P_1(t_1) dt_1$ 、2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ 、3 時点検出確率 $P_3(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ を求める方法である^[6, 17]。これら 1~3 時点検出確率の物理的意味は以下で述べるが、これらを用いることで中性子検出数の階乗モーメントの期待値を求めることができ、最終的に Y 、 X 値の理論式を導出することができる。物理的直感法を用いることで、二次相関量 Y 、三次相関量 X 値がどのような物理現象により生じるか、その物理的意味を把握することができる。

物理的直感法の特徴として、連鎖反応家系が存続する確率としてグリーン関数を用いる点が挙げられる。例えば、時刻 t_0 において位置 \mathbf{r}_0 にエネルギー E_0 、方向 $\boldsymbol{\Omega}_0$ の中性子が 1 個投入されたとする。次に、投入された 1 個の中性子が連鎖反応を起こし、時刻 t において位置 \mathbf{r} でエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ の子孫の中性子（あるいは投入した中性子そのもの）が核反応を起こすとする。ここで、投入された 1 個の中性子が連鎖反応を経て、その子孫が核反応を起こすまでの連鎖反応家系を想像したとすると、この連鎖反応家系のパターンは無限に存在するため、全ての連鎖反応家系を列挙することはできない。そこで、投入された 1 個の中性子が連鎖反応を経てその子孫が核反応を起こすまでの過程を巨視的に捉えることにし、「時刻 t_0 において位置 \mathbf{r}_0 にエネルギー E_0 、方向 $\boldsymbol{\Omega}_0$ で 1 個の中性子が投入された時に、時刻 t に位置 \mathbf{r} でエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ の子孫が 1 個存在する確率」を導入する。この確率は、以下で述べるようにグリーン関数 $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ を用いて表すことができる。

3.4 グリーン関数

グリーン関数 $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ とは、時刻 t_0 において位置 \mathbf{r}_0 にエネルギー E_0 、方向 $\boldsymbol{\Omega}_0$ の中性子が 1 個投入されることによって生じる、後の時刻 t における位置 \mathbf{r} 、エネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ の角度中性子数密度(angular neutron density)を表す。このグリーン関数 $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ は、以下のような中性子輸送方程式により定義される。

$$\frac{\partial n_G}{\partial t} = -\mathbf{B} n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(E - E_0) \delta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_0) \delta(t - t_0) \quad \text{if } (t \geq t_0) \quad (3-1)$$

$$n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t' | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) = 0 \quad \text{if } (t < t_0) \quad (3-2)$$

$$n_G(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}', t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}' < 0) \quad (3-3)$$

ただし \mathbf{B} は以下で定義されるボルツマン演算子である。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \equiv & v(E) \boldsymbol{\Omega} \nabla + v(E) \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E') \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \\ & - \frac{\chi_f(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu p_f(\nu, E') \end{aligned} \quad (3-4)$$

ただし $v(E)$ は中性子速度、 $\Sigma_t(\mathbf{r}, E)$ は巨視的全断面積、 $\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega})$ は巨視的散乱断面積、 $\Sigma_f(\mathbf{r}, E)$ は巨視的核分裂断面積、 $\chi_f(E)$ は核分裂スペクトル、 ν は核分裂反応 1 回当りに発生する中性子数、 $p_f(\nu, E)$ はエネルギー E の中性子が核分裂反応を起こして ν 個の中性子が発生する確率をそれぞれ表す。上で定義されるグリーン関数 $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ を用いることで、「時刻 t_0 において位置 \mathbf{r}_0 にエネルギー E_0 、方向 $\boldsymbol{\Omega}_0$ で 1 個の中性子が投入された時に、時刻 t に位置 \mathbf{r} でエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ の子孫が 1 個存在する確率」が $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) d\mathbf{r} dE d\boldsymbol{\Omega}$ と表すことができるのが分かる。なぜなら $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) d\mathbf{r} dE d\boldsymbol{\Omega}$ は、時刻 t_0 において位置 \mathbf{r}_0 にエネルギー E_0 、方向 $\boldsymbol{\Omega}_0$ の中性子が 1 個投入されたときに、時刻 t において位置 $\mathbf{r} \sim \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ の微小領域に存在するエネルギー $E \sim E + dE$ 、方向 $\boldsymbol{\Omega} \sim \boldsymbol{\Omega} + d\boldsymbol{\Omega}$ の中性子数の期待値を表すからである。さらに $d\mathbf{r} dE d\boldsymbol{\Omega}$ がゼロに限りなく近い微小量であることを考慮すれば、その範囲内に 2 個以上の中性子が存在する確率はゼロとみなせるので、 $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) d\mathbf{r} dE d\boldsymbol{\Omega}$ は子孫の中性子が 1 個存在する確率であると考えることができる。

3.4.1 1点炉・エネルギー1群近似の場合のグリーン関数

1点炉、エネルギー1群と近似した場合、グリーン関数 $n_G(t|t_0)$ は以下のように簡単に導出することができる。

$$n_G(t|t_0) = e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (3-5)$$

$$\alpha = v \langle \nu \rangle \Sigma_f (-\rho) \quad (3-6)$$

ただし α は中性子減衰定数を表す。上で求められた $n_G(t|t_0)$ は「1個の中性子が時刻 t_0 に投入された時に、その子孫が時刻 t に1個存在する確率」を表す。この $n_G(t|t_0)$ を利用することで、物理的直感法により、1点炉、エネルギー1群における Y 、 X 値の理論式を導出することができる。

仮に角度中性子数密度のグリーン関数 $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ を近似無しで求めることができれば、従来の導出で用いられる $n_G(t|t_0)$ を $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) d\mathbf{r} dE d\boldsymbol{\Omega}$ に置き換えることで、空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮した Y 、 X 値の理論式を導出することができる。そこで $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ を導出するために、以下で述べるように固有関数展開を利用した。

3.4.2 固有関数展開を利用したグリーン関数の導出

固有関数展開を利用することにより、以下のように $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ を導出した^[18, 19, 20]。

まず、以下のように定義される α 固有値方程式を考える。

$$\mathbf{B} \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \alpha_n \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-7)$$

$$\psi_n(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}') = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\boldsymbol{\Omega}' < 0) \quad (3-8)$$

ただし \mathbf{B} は(3-4)式で定義されるボルツマン演算子であり、 α_n は n 次モードの中性子減衰定数、 $\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ は固有値 α_n に対応する n 次モードの固有関数を表す。

次に、上で定義される α 固有値方程式の随伴方程式を考える。

$$\mathbf{B}^\dagger \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \alpha_n \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-9)$$

$$\psi_n^\dagger(\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}') = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\boldsymbol{\Omega}' > 0) \quad (3-10)$$

ただし \mathbf{B}^\dagger は \mathbf{B} の随伴演算子であり、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\dagger \equiv & -v(E)\boldsymbol{\Omega}\nabla + v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') \\ & - v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu=0}^\infty \nu p_f(\nu, E) \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_f(E')}{4\pi} \end{aligned} \quad (3-11)$$

また $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ は固有値 α_n に対応する n 次モードの随伴固有関数を表す。随伴演算子 \mathbf{B}^\dagger は以下のような数学的性質を持つ。

$$\int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) (\mathbf{B} \psi_m(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})) = \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \psi_m(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) (\mathbf{B}^\dagger \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})) \quad (3-12)$$

さらに $\psi_m(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ は以下のような直交性を満足し、以下のように規格化されているとする（正規直交条件を満足する）。

$$\int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \psi_m^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \delta_{mn} \quad (3-13)$$

以上で求められる固有関数 $\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いて、 $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ を以下のように展開することができるかと仮定する。

$$n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) = \sum_n T_n \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-14)$$

ただし T_n は n 次モードの展開係数である。上式を(3-1)式に代入し、(3-1)式の両辺に $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ をかけて全空間・エネルギー・方向で積分することで、展開係数 T_n に関する微分方程式が以下のよう
に得られる。

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = -\alpha_n T_n + \psi_n^\dagger(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) \delta(t - t_0) \quad \text{if } (t \geq t_0) \quad (3-15)$$

上式より展開係数 T_n が

$$T_n = \psi_n^\dagger(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) e^{-\alpha_n(t-t_0)} \quad \text{if } (t \geq t_0) \quad (3-16)$$

と求められるので、結局 $n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0)$ が以下のように求められる。

$$n_G(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t | \mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0, t_0) = \sum_n \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \psi_n^\dagger(\mathbf{r}_0, E_0, \boldsymbol{\Omega}_0) e^{-\alpha_n(t-t_0)} \quad \text{if } (t \geq t_0) \quad (3-17)$$

3.5 1 時点検出確率

1 時点検出確率 $P_1(t_1) dt_1$ とは、定常状態の未臨界体系において時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ の間に 1 個の中性子が検出される確率を意味する。ここで検出時間幅 T の間に検出された中性子数を $C(T)$ とすると、1 時点検出確率 $P_1(t_1) dt_1$ を $0 \leq t_1 < T$ の範囲で積分することで、 $C(T)$ の期待値 (あるいは平均) $\langle C(T) \rangle$ を得ることができる。

$$\langle C(T) \rangle = \int_0^T dt_1 P_1(t_1) \quad (3-18)$$

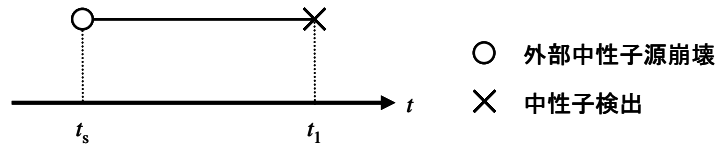


Fig. 3-1 1 時点検出過程

Fig. 3-1 で示されるように、時刻 t_s において外部中性子源が崩壊し、後の時刻 t_1 に中性子が検出されるような 1 時点検出過程を考える。ただし Fig. 3-1 において、中性子が検出されるまでの過程が単に直線で表されているが、線源の崩壊により中性子が発生してから検出されるまでに連鎖反応が起きるので、線源で放出された中性子が直接検出されるだけでなく、その子孫の中性子が検出される場合もあることに注意しなければならない。この 1 時点検出過程において、時刻 t_1 で 1 個の中性子が検出される確率 (あるいは時刻 t_1 で検出される中性子数の期待値) は以下の積で表される。

- ① 時刻 t_s において位置 \mathbf{r}_s で外部中性子源が崩壊する確率 $S(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s dt_s$ 。ただし $S(\mathbf{r})$ は外部中性子源強度の空間分布を表す。
- ② 外部中性子源が崩壊して q 個の中性子が発生する確率 $p_s(q)$ 。
- ③ 外部中性子源の崩壊で発生した中性子数が q 個なので、時刻 t_1 で検出される中性子の先祖は q 通り。

- ④ 外部中性子源が崩壊することでエネルギー E_s 、方向 Ω_s の中性子が体系に投入される確率 $(\chi_s(E_s)/4\pi)dE_s d\Omega_s$ 。ただし $\chi_s(E)$ は外部中性子源で発生する中性子のエネルギースペクトルを表す。
- ⑤ 外部中性子源の崩壊により $(\mathbf{r}_s, E_s, \Omega_s, t_s)$ で発生した 1 個の中性子の子孫が $(\mathbf{r}_1, E_1, \Omega_1, t_1)$ で存在する確率、上で述べたグリーン関数を用いることで、 $n_G(\mathbf{r}_1, E_1, \Omega_1, t_1 | \mathbf{r}_s, E_s, \Omega_s, t_s) d\mathbf{r}_1 dE_1 d\Omega_1$ 。
- ⑥ その子孫が $(\mathbf{r}_1, E_1, \Omega_1, t_1)$ で検出される確率 $v(E_1)\Sigma_d(\mathbf{r}_1, E_1) dt_1$ 。ただし $\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ は巨視的検出反応断面積を表す。

以上の積が Fig. 3-1 で表される 1 時点検出過程で中性子が検出される確率であり、こうして得られた確率を時刻 t_1 以外の変数に対して全範囲で積分することで (q については全ての和を取ること)、1 時点検出確率 $P_1(t_1) dt_1$ が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\begin{aligned} P_1(t_1) dt_1 &= \int_{-\infty}^{t_1} dt_s \int_V d\mathbf{r}_s S(\mathbf{r}_s) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE_s \int_{4\pi} d\Omega_s \frac{\chi_s(E_s)}{4\pi} \\ &\quad \times \int_V d\mathbf{r}_1 \int_0^{\infty} dE_1 \int_{4\pi} d\Omega_1 v(E_1)\Sigma_d(\mathbf{r}_1, E_1) \sum_n \psi_n(\mathbf{r}_1, E_1, \Omega_1) \psi_n^\dagger(\mathbf{r}_s, E_s, \Omega_s) e^{-\alpha_n(t_1-t_s)} dt_1 \quad (3-19) \\ &= \sum_n \frac{S_n D_n}{\alpha_n} dt_1 \end{aligned}$$

$$S_n \equiv \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \Psi_{s,n}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (3-20)$$

$$\Psi_{s,n}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \Omega) \quad (3-21)$$

$$D_n \equiv \int_V d\mathbf{r} \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E) \psi_n(\mathbf{r}, E, \Omega) \quad (3-22)$$

ただし上式で定義した各定数の物理的意味は以下のようなものである。

S_n : 単位時間当りに、外部中性子源の崩壊により n 次モードの中性子が発生する確率

$\Psi_{s,n}^\dagger(\mathbf{r})$: 位置 \mathbf{r} で外部中性子源の崩壊により発生する n 次モードの中性子のインポートランス

D_n : 単位時間当りに、 n 次モードの中性子が検出される確率

3.6 2 時点検出確率

2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ とは、定常状態の未臨界体系において時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ と時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ の間 ($t_1 < t_2$) で 1 つの中性子の対(pair)が検出される確率を意味する。ここで検出時間幅 T の間に検出された中性子数の対の数は、 $C(T)(C(T)-1)/2$ で表されるのに注意すると、2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ を $0 \leq t_1 < t_2$ 、 $0 \leq t_2 < T$ の範囲で積分することで、検出時間幅 T の間に検出された中性子数の対の数 $C(T)(C(T)-1)/2$ の期待値 $\langle C(T)(C(T)-1)/2 \rangle$ を得ることができる。

$$\left\langle \frac{C(T)(C(T)-1)}{2} \right\rangle = \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 P_2(t_1, t_2) \quad (3-23)$$

この 2 時点検出過程は、1) 2 つの独立な連鎖反応家系から成る場合、2) 同一の連鎖反応家系から成る場合、の 2 つの過程に分けられる。

3.6.1 2つの独立な連鎖反応家系から成る2時点検出確率

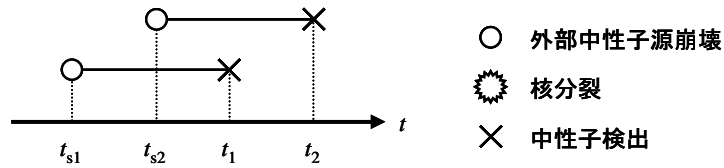


Fig. 3-2 2つの独立な連鎖反応家系から成る2時点検出過程

ここでは Fig. 3-2 で示されるように、2つの互いに独立な連鎖反応家系に属する中性子がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 で検出される2時点検出確率を求める。この2時点検出過程は検出された1対の中性子の間に相関がないことを意味する。まず1つの連鎖反応家系に属する中性子が時刻 t_1 で検出される確率は、上で導出した1時点検出確率を用いて $P_1(t_1)dt_1$ で表される。同様に、残りの1つの連鎖反応家系に属する中性子が時刻 t_2 で検出される確率は $P_1(t_2)dt_2$ で表される。2つの連鎖反応家系は互いに独立なので、これら $P_1(t_1)dt_1$ 、 $P_1(t_2)dt_2$ の積を取ることで、2つの独立な連鎖反応家系から成る2時点検出確率が求められる。

$$P_1(t_1)P_1(t_2)dt_1dt_2 \quad (3-24)$$

3.6.2 同一の連鎖反応家系から成る2時点検出確率

ここでは、同一の連鎖反応家系に属する中性子がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 で検出される2時点検出確率を求める。この2時点検出過程は検出された1対の中性子の間に相関があることを意味する。この2時点検出過程では、1つの連鎖反応家系が分岐することにより2つの中性子が検出される。従って、1)核分裂反応により連鎖反応家系が分岐するか、あるいは2)外部中性子源の崩壊により連鎖反応家系が分岐するかで、さらに2通りに場合分けされる。

1) 核分裂反応により連鎖反応家系が分岐する場合

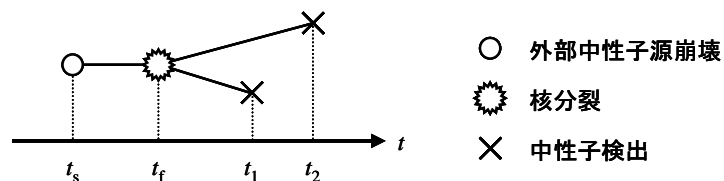
Fig. 3-3 同一の連鎖反応家系から成る2時点検出確率
(核分裂反応により連鎖反応家系が分岐する場合)

Fig. 3-3 で示されるように、時刻 t_s において外部中性子源が崩壊し、時刻 t_f で連鎖反応家系が核分裂反応により分岐した後に時刻 t_1 、 t_2 で検出される2時点検出過程を考える。この2時点検出過程は以下の積で求められる。

- ① 時刻 t_s において時刻位置 \mathbf{r}_s で外部中性子源が崩壊する確率 $S(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s dt_s$ 。
- ② 外部中性子源が崩壊して q 個の中性子が発生する確率 $p_s(q)$ 。
- ③ 外部中性子源の崩壊で発生した中性子数が q 個なので、時刻 t_1 で検出される中性子の先祖は q 通り。
- ④ 外部中性子源が崩壊することでエネルギー E_s 、方向 $\boldsymbol{\Omega}_s$ の中性子が体系に投入される確率 $(\chi_s(E_s)/4\pi) dE_s d\boldsymbol{\Omega}_s$ 。
- ⑤ 外部中性子源の崩壊により $(\mathbf{r}_s, E_s, \boldsymbol{\Omega}_s, t_s)$ で発生した 1 個の中性子の子孫が $(\mathbf{r}_f, E_f, \boldsymbol{\Omega}_f, t_f)$ で存在する確率 $n_G(\mathbf{r}_f, E_f, \boldsymbol{\Omega}_f, t_f | \mathbf{r}_s, E_s, \boldsymbol{\Omega}_s, t_s) d\mathbf{r}_f dE_f d\boldsymbol{\Omega}_f$ 。
- ⑥ その子孫が $(\mathbf{r}_f, E_f, \boldsymbol{\Omega}_f, t_f)$ で核分裂反応を起こす確率 $\nu(E_f) \Sigma_f(\mathbf{r}_f, E_f) dt_f$ 。
- ⑦ エネルギー E_f の中性子が起こした核分裂反応により ν 個の中性子が発生する確率 $p_f(\nu, E_f)$ 。
- ⑧ 核分裂反応で発生した中性子数が ν 個なので、時刻 t_1 、 t_2 で検出される中性子の先祖の組合せは $\nu(\nu-1)$ 通り。
- ⑨ 核分裂反応によりエネルギー E'_f 、方向 $\boldsymbol{\Omega}'_f$ (もしくはエネルギー E''_f 、方向 $\boldsymbol{\Omega}''_f$) の中性子が体系に投入される確率 $(\chi_f(E'_f)/4\pi) dE'_f d\boldsymbol{\Omega}'_f$ (もしくは $(\chi_f(E''_f)/4\pi) dE''_f d\boldsymbol{\Omega}''_f$)。
- ⑩ 核分裂反応により $(\mathbf{r}_f, E'_f, \boldsymbol{\Omega}'_f, t_f)$ で発生した 1 個の中性子の子孫が $(\mathbf{r}_1, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1, t_1)$ で存在する確率 $n_G(\mathbf{r}_1, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1, t_1 | \mathbf{r}_f, E'_f, \boldsymbol{\Omega}'_f, t_f) d\mathbf{r}_1 dE_1 d\boldsymbol{\Omega}_1$ 。
- ⑪ その子孫が $(\mathbf{r}_1, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1, t_1)$ で検出される確率 $\nu(E_1) \Sigma_d(\mathbf{r}_1, E_1) dt_1$ 。
- ⑫ 核分裂反応により $(\mathbf{r}_f, E''_f, \boldsymbol{\Omega}''_f, t_f)$ で発生した別の 1 個の中性子の子孫が $(\mathbf{r}_2, E_2, \boldsymbol{\Omega}_2, t_2)$ で存在する確率 $n_G(\mathbf{r}_2, E_2, \boldsymbol{\Omega}_2, t_2 | \mathbf{r}_f, E''_f, \boldsymbol{\Omega}''_f, t_f) d\mathbf{r}_2 dE_2 d\boldsymbol{\Omega}_2$ 。
- ⑬ その子孫が $(\mathbf{r}_2, E_2, \boldsymbol{\Omega}_2, t_2)$ で検出される確率 $\nu(E_2) \Sigma_d(\mathbf{r}_2, E_2) dt_2$ 。

以上の積が Fig. 3-3 で表される 2 時点検出過程で中性子の対が検出される確率であり、こうして得られた確率を時刻 t_1 、 t_2 以外の全ての変数に対して全範囲で積分することで (ν 、 q については全ての和を取ることで)、連鎖反応家系が核分裂反応により分岐する場合の 2 時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_f < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{t_1} dt_f \int_{-\infty}^{t_f} dt_s \int_V d\mathbf{r}_s S(\mathbf{r}_s) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE_s \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}_s \frac{\chi_s(E_s)}{4\pi} \\
 & \times \int_V d\mathbf{r}_f \int_0^{\infty} dE_f \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}_f \nu(E_f) \Sigma_f(\mathbf{r}_f, E_f) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1) p_f(\nu, E_f) \\
 & \times \sum_l \psi_l(\mathbf{r}_f, E_f, \boldsymbol{\Omega}_f) \psi_l^\dagger(\mathbf{r}_s, E_s, \boldsymbol{\Omega}_s) e^{-\alpha_l(t_f-t_s)} \int_0^{\infty} dE'_f \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}'_f \frac{\chi_f(E'_f)}{4\pi} \int_0^{\infty} dE''_f \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}''_f \frac{\chi_f(E''_f)}{4\pi} \\
 & \times \int_V d\mathbf{r}_1 \int_0^{\infty} dE_1 \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}_1 \nu(E_1) \Sigma_d(\mathbf{r}_1, E_1) \sum_m \psi_m(\mathbf{r}_1, E_1, \boldsymbol{\Omega}_1) \psi_m^\dagger(\mathbf{r}_f, E'_f, \boldsymbol{\Omega}'_f) e^{-\alpha_m(t_1-t_f)} \\
 & \times \int_V d\mathbf{r}_2 \int_0^{\infty} dE_2 \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}_2 \nu(E_2) \Sigma_d(\mathbf{r}_2, E_2) \sum_n \psi_n(\mathbf{r}_2, E_2, \boldsymbol{\Omega}_2) \psi_n^\dagger(\mathbf{r}_f, E''_f, \boldsymbol{\Omega}''_f) e^{-\alpha_n(t_2-t_f)} dt_1 dt_2 \\
 & = \sum_m \sum_n \sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mm} D_m D_n}{\alpha_l (\alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_n(t_2-t_1)} dt_1 dt_2
 \end{aligned} \tag{3-25}$$

$$F_{l \rightarrow mm} \equiv \int_V d\mathbf{r} \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \nu(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \psi_l(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1) p_f(\nu, E) \Psi_{f,m}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{f,n}^\dagger(\mathbf{r}) \tag{3-26}$$

$$\Psi_{l,n}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_l(E)}{4\pi} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \Omega) \quad (3-27)$$

ただし上式で定義した各定数の物理的意味は以下のものである。

$F_{l \rightarrow mn}$: 単位時間当りに、 l 次モードの中性子が核分裂を起こすことで家系が 2 又に分かれ m 、 n 次モードの中性子が放出される確率

$\Psi_{l,n}^\dagger(\mathbf{r})$: 位置 \mathbf{r} で核分裂反応により発生する n 次モードの中性子のインポートランス

2) 外部中性子源の崩壊により連鎖反応家系が分岐する場合

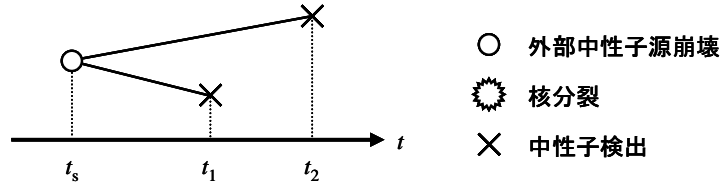


Fig. 3-4 同一の連鎖反応家系から成る 2 時点検出確率
(外部中性子源の崩壊により連鎖反応家系が分岐する場合)

Fig. 3-4 で示されるように、時刻 t_s において外部中性子源が崩壊し、時刻 t_1 で連鎖反応家系が外部中性子源の崩壊により分岐した後に時刻 t_1 、 t_2 で検出される 2 時点検出過程を考える。この 2 時点検出過程は以下の積で求められる。

- ① 時刻 t_s において時刻位置 \mathbf{r}_s で外部中性子源が崩壊する確率 $S(\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_s dt_s$ 。
- ② 外部中性子源が崩壊して q 個の中性子が発生する確率 $p_s(q)$ 。
- ③ 外部中性子源の崩壊で発生した中性子数が q 個なので、時刻 t_1 、 t_2 で検出される中性子の先祖の組合せは $q(q-1)$ 通り。
- ④ 外部中性子源が崩壊することでエネルギー E_s 、方向 Ω_s (もしくはエネルギー E'_s 、方向 Ω'_s) の中性子が体系に投入される確率 $\chi_s(E_s)/4\pi dE_s d\Omega_s$ 。(もしくは $(\chi_s(E'_s)/4\pi) dE'_s d\Omega'_s$)
- ⑤ 外部中性子源の崩壊により $(\mathbf{r}_s, E_s, \Omega_s, t_s)$ で発生した 1 個の中性子の子孫が $(\mathbf{r}_1, E_1, \Omega_1, t_1)$ で存在する確率 $n_G(\mathbf{r}_1, E_1, \Omega_1, t_1 | \mathbf{r}_s, E_s, \Omega_s, t_s) d\mathbf{r}_1 dE_1 d\Omega_1$ 。
- ⑥ その子孫が $(\mathbf{r}_1, E_1, \Omega_1, t_1)$ で検出される確率 $v(E_1) \Sigma_d(\mathbf{r}_1, E_1) dt_1$ 。
- ⑦ 外部中性子源の崩壊により $(\mathbf{r}_s, E'_s, \Omega'_s, t_s)$ で発生した別の 1 個の中性子の子孫が $(\mathbf{r}_2, E_2, \Omega_2, t_2)$ で存在する確率 $n_G(\mathbf{r}_2, E_2, \Omega_2, t_2 | \mathbf{r}_s, E'_s, \Omega'_s, t_s) d\mathbf{r}_2 dE_2 d\Omega_2$ 。
- ⑧ その子孫が $(\mathbf{r}_2, E_2, \Omega_2, t_2)$ で検出される確率 $v(E_2) \Sigma_d(\mathbf{r}_2, E_2) dt_2$ 。

以上の積が Fig. 3-4 で表される 2 時点検出過程で中性子の対が検出される確率であり、こうして得られた確率を時刻 t_1 、 t_2 以外の変数に対して全範囲で積分することで (q については全ての和を取ることで)、連鎖反応家系が外部中性子源の崩壊により分岐する場合の 2 時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{t_1} dt_s \int_V dr_s S(r_s) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \int_0^{\infty} dE_s \int_{4\pi} d\Omega_s \frac{\chi_s(E_s)}{4\pi} \int_0^{\infty} dE'_s \int_{4\pi} d\Omega'_s \frac{\chi_s(E'_s)}{4\pi} \\
& \quad \times \int_V dr_1 \int_0^{\infty} dE_1 \int_{4\pi} d\Omega_1 v(E_1) \Sigma_d(r_1, E_1) \sum_m \psi_m(r_1, E_1, \Omega_1) \psi_m^\dagger(r_s, E_s, \Omega_s) e^{-\alpha_m(t_1-t_s)} \\
& \quad \times \int_V dr_2 \int_0^{\infty} dE_2 \int_{4\pi} d\Omega_2 v(E_2) \Sigma_d(r_2, E_2) \sum_n \psi_n(r_2, E_2, \Omega_2) \psi_n^\dagger(r_s, E'_s, \Omega'_s) e^{-\alpha_n(t_2-t_s)} dt_1 dt_2 \\
& = \sum_m \sum_n \frac{S_{mm} D_m D_n}{\alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_n(t_2-t_1)} dt_1 dt_2
\end{aligned} \tag{3-28}$$

$$S_{mm} \equiv \int_V dr S(r) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \Psi_{s,m}^\dagger(r) \Psi_{s,n}^\dagger(r) \tag{3-29}$$

ただし上式で定義した各定数の物理的意味は以下のものである。

S_{mm} : 単位時間当りに、外部中性子源の崩壊により家系が 2 又に分かれ m 、 n 次モードの中性子が放出される確率

以上より同一の連鎖反応家系から成る 2 時点検出確率 $P_{2,\text{cor}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ が以下のように求められる。

$$P_{2,\text{cor}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mm}}{\alpha_l} \right) + S_{mm} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_n(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \tag{3-30}$$

3.6.3 全 2 時点検出確率

以上で導出された、

- 1) 2 つの独立な連鎖反応家系から成る 2 時点検出確率 $P_1(t_1) P_1(t_2) dt_1 dt_2$
- 2) 同一の連鎖反応家系から成る 2 時点検出確率 $P_{2,\text{cor}}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$

の和を取ることで、最終的に全 2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ が以下のように求められる。

$$P_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \left[P_1(t_1) P_1(t_2) + \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mm}}{\alpha_l} \right) + S_{mm} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_n(t_2-t_1)} \right] dt_1 dt_2 \tag{3-31}$$

3.7 3 時点検出確率

3 時点検出確率 $P_3(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ とは、定常状態の未臨界体系において時刻 $t_1 \sim t_1+dt_1$ 、時刻 $t_2 \sim t_2+dt_2$ 、時刻 $t_3 \sim t_3+dt_3$ の間 ($t_1 < t_2 < t_3$) で 1 つの中性子の組(trio)検出される確率を意味する。ここで検出時間幅 T の間に検出された中性子数の組(trio)の数は、 $C(T)(C(T)-1)(C(T)-2)/6$ で表されるのに注意すると、3 時点検出確率 $P_3(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ を $0 \leq t_1 < t_2$ 、 $0 \leq t_2 < t_3$ 、 $0 \leq t_3 < T$ の範囲で積分することで、検出時間幅 T の間に検出された中性子数の組(trio)の数 $C(T)(C(T)-1)(C(T)-2)/6$ の期待値 $\langle C(T)(C(T)-1)(C(T)-2)/6 \rangle$ を得ることができる。

$$\left\langle \frac{C(T)(C(T)-1)(C(T)-2)}{6} \right\rangle = \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 P_3(t_1, t_2, t_3) \tag{3-32}$$

この 3 時点検出過程は、1) 3 つの独立な連鎖反応家系から成る場合、2) 2 つの独立な連鎖反応家系から成る場合、3) 同一の連鎖反応家系から成る場合、の 3 つの過程に分けられる。

3.7.1 3つの独立な連鎖反応家系から成る3時点検出確率

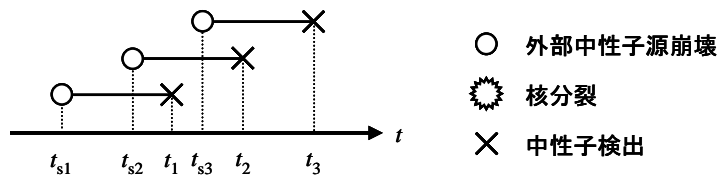


Fig. 3-5 3つの独立な連鎖反応家系から成る3時点検出過程

ここでは、Fig. 3-5 で示されるように3つの互いに独立な連鎖反応家系に属する中性子がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出される3時点検出確率を求める。この3時点検出過程は検出された1組(trio)の中性子の間に全く相関がないことを意味する。まず、1つの連鎖反応家系に属する中性子が時刻 t_1 で検出される確率は1時点検出確率を用いて $P_1(t_1)dt_1$ で表される。同様に、残りの2つの連鎖反応家系に属する中性子が時刻 t_2 、 t_3 で検出される確率はそれぞれ $P_1(t_2)dt_2$ 、 $P_1(t_3)dt_3$ で表される。3つの連鎖反応家系は互いに独立なので、これら $P_1(t_1)dt_1$ 、 $P_1(t_2)dt_2$ 、 $P_1(t_3)dt_3$ の積を取ることで、3つの独立な連鎖反応家系から成る3時点検出確率が求められる。

$$P_1(t_1)P_1(t_2)P_1(t_3)dt_1dt_2dt_3 \quad (3-33)$$

3.7.2 2つの独立な連鎖反応家系から成る3時点検出確率

ここでは、2つの独立な連鎖反応家系に属する中性子がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出される3時点検出確率を求める。この3時点検出過程は検出された1組(trio)の中性子のうち2個の中性子の間に相関があることを意味する。この3時点検出過程では、2つの連鎖反応家系のうち1つの連鎖反応家系が、核分裂反応もしくは外部中性子源の崩壊により分岐することで3つの中性子が検出される。ここで時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出される中性子がどちらの連鎖反応家系に属するかで3通りに場合分けされる。

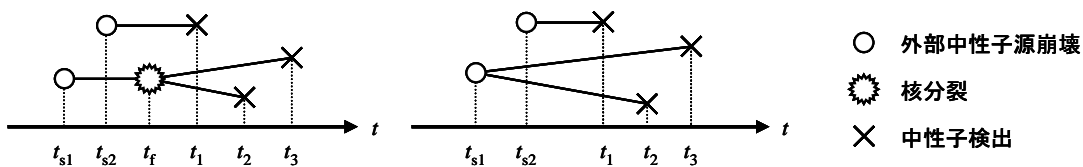
1) 時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合Fig. 3-6 2つの連鎖反応家系から成る3時点検出確率
(時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合)

Fig. 3-6 で示されるように、2つの独立な連鎖反応家系に属する中性子が時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出され、かつ時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合の3時点検出確率を求める。まず、まず、1つの連鎖反応家系に属する中性子が時刻 t_1 で検出される確率は1時点検出確率に

より $P_1(t_1)dt_1$ で表される。次に、残りの 1 つの連鎖反応家系が核分裂反応もしくは外部中性子源の崩壊により分岐することで時刻 t_2, t_3 で検出される 2 時点検出確率は、(3-30)式を利用することにより $P_{2,\text{cor}}(t_2, t_3)dt_2dt_3$ で表される。2 つの連鎖反応家系は互いに独立なので、これら $P_1(t_1)dt_1$ と $P_{2,\text{cor}}(t_2, t_3)dt_2dt_3$ の積を取ることで、この場合の 3 時点検出確率が求められる。

$$P_1(t_1)P_{2,\text{cor}}(t_2, t_3)dt_1dt_2dt_3 \quad (3-34)$$

2) 時刻 t_1, t_3 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合

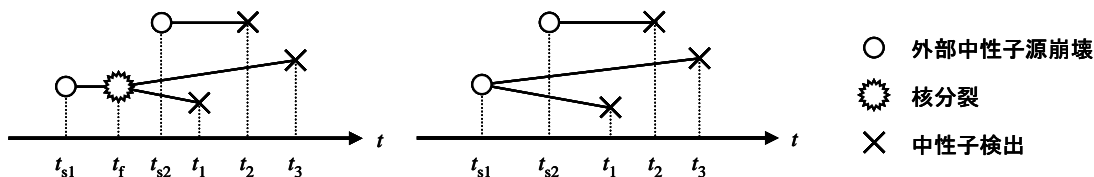


Fig. 3-7 2つの連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率
(時刻 t_1, t_3 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合)

Fig. 3-7 で示されるように、2 つの独立な連鎖反応家系に属する中性子が時刻 t_1, t_2, t_3 で検出され、かつ時刻 t_1, t_3 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合の 3 時点検出確率を求める。1)と同様に考えれば、 $P_1(t_2)dt_2$ と $P_{2,\text{cor}}(t_1, t_3)dt_1dt_3$ の積を取ることで、この場合の 3 時点検出確率が求められる。

$$P_1(t_2)P_{2,\text{cor}}(t_1, t_3)dt_1dt_2dt_3 \quad (3-35)$$

3) 時刻 t_1, t_2 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合

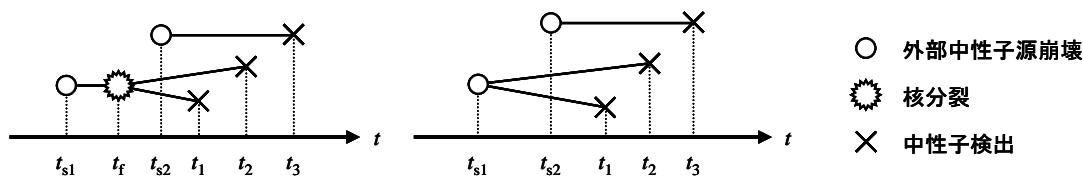


Fig. 3-8 2つの連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率
(時刻 t_1, t_2 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合)

Fig. 3-8 で示されるように、2 つの独立な連鎖反応家系に属する中性子が時刻 t_1, t_2, t_3 で検出され、かつ時刻 t_1, t_2 で検出される中性子が同一の連鎖反応家系の場合の 3 時点検出確率を求める。1)と同様に考えれば、 $P_1(t_3)dt_3$ と $P_{2,\text{cor}}(t_1, t_2)dt_1dt_2$ の積を取ることで、この場合の 3 時点検出確率が求められる。

$$P_1(t_3)P_{2,\text{cor}}(t_1, t_2)dt_1dt_2dt_3 \quad (3-36)$$

以上より 2 つの独立な連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率が以下のように求められる。

$$\{P_1(t_1)P_{2,\text{cor}}(t_2, t_3) + P_1(t_2)P_{2,\text{cor}}(t_1, t_3) + P_1(t_3)P_{2,\text{cor}}(t_1, t_2)\}dt_1dt_2dt_3 \quad (3-37)$$

3.7.3 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率

ここでは、同一の連鎖反応家系に属する中性子がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出される 3 時点検出確率を求める。この 3 時点検出過程は検出された 1 組(trio)の中性子のどの中性子の間にも相関があることを意味する。この 3 時点検出過程では、1 つの連鎖反応家系が 1) 二又に 2 回分岐するか、あるいは 2) 三又に 1 回分岐することで 3 つの中性子が検出される。

3.7.3.1 連鎖反応家系が二又に 2 回分岐する場合（二又成分）

1 つの連鎖反応家系が二又に 2 回分岐することで、その連鎖反応家系に属する中性子がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出される 3 時点検出確率を求める。この 3 時点検出過程は、1) 連鎖反応家系の 1 回目の分岐が核分裂反応か、2) 外部中性子源の崩壊によるかで、さらに 2 通りに場合分けされる。当然ながら、2 回目の分岐は核分裂反応の場合だけに限られる。

1) 連鎖反応家系の 1 回目の分岐が核分裂反応の場合

連鎖反応家系の 1 回目の分岐が核分裂反応の場合、時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出される中性子のうちどれが 2 回目の核分裂反応の子孫であるかによって、さらに 3 通りに場合分けされる。

1-a) 時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が 2 回目の核分裂反応の子孫である場合

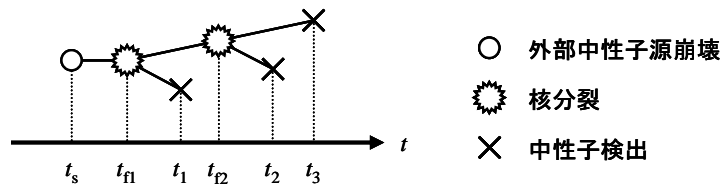


Fig. 3-9 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率（連鎖反応家系が二又に 2 回分岐、1 回目の分岐が核分裂反応、時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が 2 回目の核分裂反応の子孫）

Fig. 3-9 で示されるように、時刻 t_s において外部中性子源が崩壊し、時刻 t_{n1} で連鎖反応家系が核分裂反応により二又に 1 回分岐し、時刻 t_{n2} で連鎖反応家系が核分裂反応により二又にもう 1 回分岐し、1 回目の核分裂反応の子孫が時刻 t_1 で検出され、2 回目の核分裂反応の子孫がそれぞれ時刻 t_2 、 t_3 で検出されるような 3 時点検出過程を考える。Fig. 3-9 で表される 3 時点検出確率は、外部中性子源が崩壊してから中性子が検出されるまでの、各事象の確率の積により求めることができる。ただし核分裂反応により二又に 2 回分岐するので、二次階乗モーメント $\nu(\nu-1)$ が 2 回現れることに注意しなければならない。これを時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 以外の全ての変数に対して全範囲で積分することで (ν 、 q については全ての和を取ることで)、この場合の 3 時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_{n1} < t_1$ 、 $t_{n1} < t_{n2} < t_2$ であることに注意しなければならない。

$$\sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{S_j F_{j \rightarrow kl} F_{k \rightarrow mn} D_l D_m D_n}{\alpha_j (-\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n)} \left(\frac{e^{-\alpha_k(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_2)}}{\alpha_k + \alpha_l} - \frac{e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)}}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} \right) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-38)$$

1-b) 時刻 t_1 、 t_3 で検出される中性子が 2 回目の核分裂反応の子孫である場合

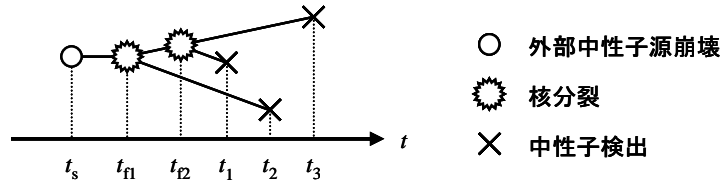


Fig. 3-10 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 (連鎖反応家系が二又に 2 回分岐、1 回目の分岐が核分裂反応、時刻 t_1 、 t_3 で検出される中性子が 2 回目の核分裂反応の子孫)

Fig. 3-10 で示されるように、2 回目の核分裂反応の子孫がそれぞれ時刻 t_1 、 t_3 で検出されるような 3 時点検出過程を考える。Fig. 3-10 で表される 3 時点検出確率も、1-a) の場合と同様に求めることができる。これを時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 以外の変数に対して全範囲で積分することで (ν 、 q については全ての和を取ることで)、この場合の 3 時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_{f1} < t_{f2} < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{S_j F_{j \rightarrow km} F_{k \rightarrow ln} D_l D_m D_n}{\alpha_j (\alpha_k + \alpha_m) (\alpha_l + \alpha_n + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2 - t_1) - \alpha_n(t_3 - t_1)} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-39)$$

1-c) 時刻 t_1 、 t_2 で検出される中性子が 2 回目の核分裂反応の子孫である場合

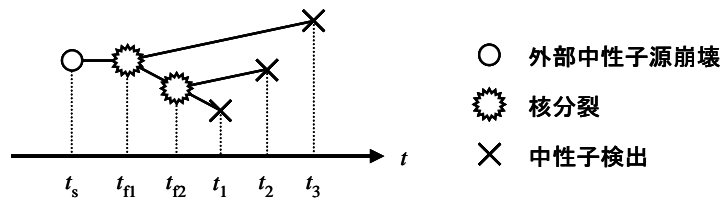


Fig. 3-11 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 (連鎖反応家系が二又に 2 回分岐、1 回目の分岐が核分裂反応、時刻 t_1 、 t_2 で検出される中性子が 2 回目の核分裂反応の子孫)

Fig. 3-11 で示されるように、2 回目の核分裂反応の子孫がそれぞれ時刻 t_1 、 t_3 で検出されるような 3 時点検出過程を考える。Fig. 3-11 で表される 3 時点検出確率も、1-a)、1-b) の場合と同様に求めることができる。これを時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 以外の変数に対して全範囲で積分することで (ν 、 q については全ての和を取ることで)、この場合の 3 時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_{f1} < t_{f2} < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{S_j F_{j \rightarrow kn} F_{k \rightarrow lm} D_l D_m D_n}{\alpha_j (\alpha_k + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2 - t_1) - \alpha_n(t_3 - t_1)} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-40)$$

2) 連鎖反応家系の 1 回目の分岐が外部中性子源の崩壊の場合

連鎖反応家系の 1 回目の分岐が外部中性子源の崩壊の場合も同様に、時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出される中性子のうちどれが核分裂反応の子孫であるかによって、さらに 3 通りに場合分けされる。

2-a) 時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が核分裂反応の子孫である場合

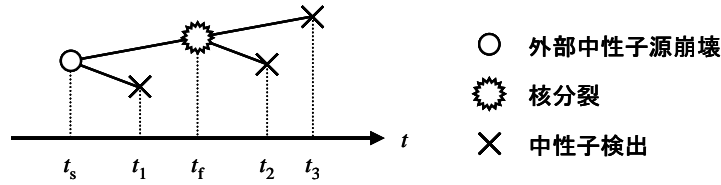


Fig. 3-12 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 (連鎖反応家系が二又に 2 回分岐、1 回目の分岐が外部中性子源の崩壊、時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が核分裂反応の子孫)

Fig. 3-12 で示されるように、時刻 t_s で外部中性子源の崩壊により二又に 1 回分岐し、時刻 t_f で連鎖反応家系が核分裂反応により二又にもう 1 回分岐し、外部中性子源の崩壊により生じた子孫が時刻 t_1 で検出され、核分裂反応の子孫がそれぞれ時刻 t_2 、 t_3 で検出されるような 3 時点検出過程を考える。Fig. 3-12 で表される 3 時点検出確率は、外部中性子源が崩壊してから中性子が検出されるまでの、各事象の確率の積により求めることができる。ただし外部中性子源の崩壊と核分裂反応により二又に分岐するので、二次階乗モーメント $\nu(\nu-1)$ 、 $q(q-1)$ が現れることに注意しなければならない。これを時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 以外の変数に対して全範囲で積分することで (ν 、 q については全ての和を取ることで)、この場合の 3 時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については、 $t_s < t_1$ 、 $t_s < t_f < t_2$ であることに注意しなければならない。

$$\sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{S_{kl} F_{k \rightarrow mn} D_l D_m D_n}{-\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n} \left(\frac{e^{-\alpha_k(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_2)}}{\alpha_k + \alpha_l} - \frac{e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)}}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} \right) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-41)$$

2-b) 時刻 t_1 、 t_3 で検出される中性子が核分裂反応の子孫である場合

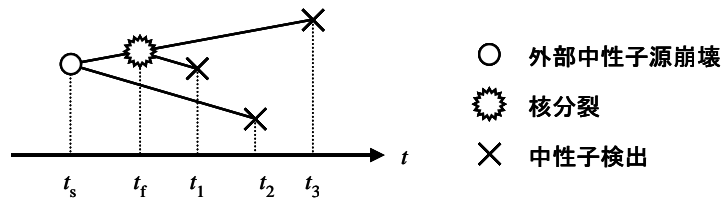


Fig. 3-13 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 (連鎖反応家系が二又に 2 回分岐、1 回目の分岐が外部中性子源の崩壊、時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が核分裂反応の子孫)

Fig. 3-13 で示されるように、核分裂反応の子孫がそれぞれ時刻 t_1 、 t_3 で検出されるような 3 時点検出過程を考える。Fig. 3-13 で表される 3 時点検出確率も、2-a) の場合と同様に求めることができる。これを時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 以外の変数に対して全範囲で積分することで (ν 、 q については全ての和を取ることで)、この場合の 3 時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_f < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{S_{km} F_{k \rightarrow ln} D_l D_m D_n}{(\alpha_k + \alpha_m)(\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-42)$$

2-c) 時刻 t_1 、 t_2 で検出される中性子が核分裂反応の子孫である場合

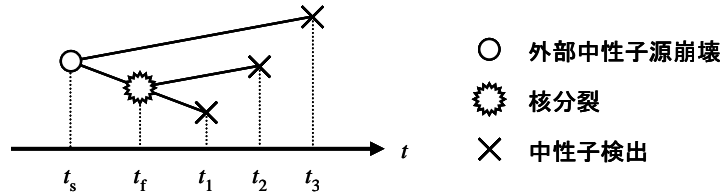


Fig. 3-14 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 (連鎖反応家系が二又に 2 回分岐、1 回目の分岐が外部中性子源の崩壊、時刻 t_2 、 t_3 で検出される中性子が核分裂反応の子孫)

Fig. 3-14 で示されるように、2 回目の分岐から派生した中性子が時刻 t_1 、 t_3 で検出されるような 3 時点検出過程を考える。Fig. 3-14 で表される 3 時点検出確率も、2-a)、2-b) の場合と同様に求めることができる。これを時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 以外の変数に対して全範囲で積分することで (ν 、 q については全ての和を取ることで)、この場合の 3 時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_f < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{S_{kn} F_{k \rightarrow lm} D_l D_m D_n}{(\alpha_k + \alpha_n)(\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2 - t_1) - \alpha_n(t_3 - t_1)} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-43)$$

3.7.3.2 連鎖反応家系が三又に 1 回分岐する場合 (三又成分)

1 つの連鎖反応家系が三又に 1 回分岐することで、その連鎖反応家系に属する中性子がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出される 3 時点検出確率を求める。この 3 時点検出過程は、1) 連鎖反応家系が核分裂反応により分岐するか、2) 外部中性子源の崩壊により分岐するかで、さらに 2 通りに場合分けされる。

1) 核分裂反応により連鎖反応家系が三又に 1 回分岐する場合

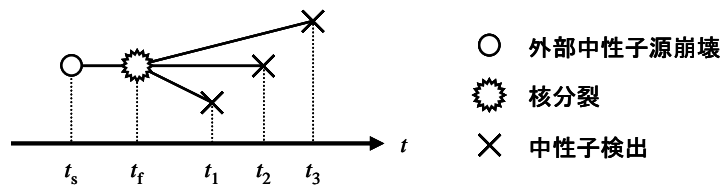


Fig. 3-15 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 (連鎖反応家系が核分裂反応により三又に 1 回分岐する場合)

Fig. 3-15 で示されるように、時刻 t_s において外部中性子源が崩壊し、時刻 t_f で連鎖反応家系が核分裂反応により三又に 1 回分岐し、その子孫がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出されるような 3 時点検出過程を考える。Fig. 3-15 の 3 時点検出確率は、外部中性子源が崩壊してから中性子が検出されるまでの、各事象の確率の積により求めることができる。ただし核分裂反応により三又に分岐するので、三次階乗モーメント $\nu(\nu-1)(\nu-2)$ が現れることに注意しなければならない。これを時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 以外の変数に対して全範囲で積分することで (ν 、 q については全ての和を

取ることで、この場合の3時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_f < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{S_k F_{k \rightarrow lmn} D_l D_m D_n}{\alpha_k (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-44)$$

$$F_{k \rightarrow lmn} \equiv \int_V dr \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \psi_k(\mathbf{r}, E, \Omega) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)(\nu-2) p_f(\nu, E) \Psi_{f,l}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{f,m}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{f,n}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (3-45)$$

ただし上式で定義した各定数の物理的意味は以下のものである。

$F_{k \rightarrow lmn}$: 単位時間当りに、 k 次モードの中性子が核分裂を起こすことで家系が3又に分かれ l 、 m 、 n 次モードの中性子が放出される確率

2) 外部中性子源の崩壊により連鎖反応家系が三又に1回分岐する場合

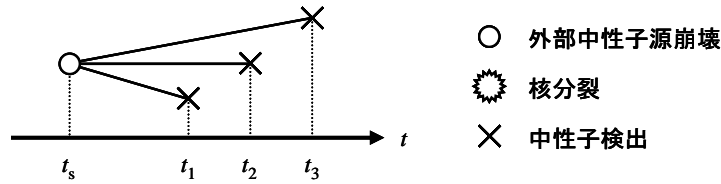


Fig. 3-16 同一の連鎖反応家系から成る3時点検出確率(連鎖反応家系が外部中性子源の崩壊により三又に1回分岐する場合)

Fig. 3-16 で示されるように、時刻 t_s において外部中性子源が崩壊することで三又に1回分岐し、その子孫がそれぞれ時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 で検出されるような3時点検出過程を考える。Fig. 3-16 の3時点検出確率は、外部中性子源が崩壊してから中性子が検出されるまでの、各事象の確率の積により求めることができる。ただし外部中性子源の崩壊により三又に分岐するので、三次階乗モーメント $q(q-1)(q-2)$ が現れることに注意しなければならない。これを時刻 t_1 、 t_2 、 t_3 以外の変数に対して全範囲で積分することで (q については全ての和を取ることで)、この場合の3時点検出確率が以下のように得られる。ただし時間積分については $t_s < t_1$ であることに注意しなければならない。

$$\sum_l \sum_m \sum_n \frac{S_{lmn} D_l D_m D_n}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)} dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-46)$$

$$S_{lmn} \equiv \int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)(q-2) p_s(q) \Psi_{s,l}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{s,m}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{s,n}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (3-47)$$

ただし上式で定義した各定数の物理的意味は以下のものである。

S_{lmn} : 単位時間当りに、外部中性子源の崩壊により家系が3又に分かれ l 、 m 、 n 次モードの中性子が放出される確率

以上より、同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 $P_{3,\text{cor}}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ が以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
& P_{3,\text{cor}}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\
&= \left[\begin{aligned}
& \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mn} D_l D_m D_n}{-\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n} \left(\frac{e^{-\alpha_k(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_2)}}{\alpha_k + \alpha_l} - \frac{e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)}}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} \right) \\
& + \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow km}}{\alpha_j} \right) + S_{km} \right\} \frac{F_{k \rightarrow ln} D_l D_m D_n}{(\alpha_k + \alpha_m)(\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)} \\
& + \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kn}}{\alpha_j} \right) + S_{kn} \right\} \frac{F_{k \rightarrow lm} D_l D_m D_n}{(\alpha_k + \alpha_n)(\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)} \\
& + \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmn}}{\alpha_k} \right) + S_{lmn} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)}
\end{aligned} \right] \\
& \times dt_1 dt_2 dt_3
\end{aligned} \tag{3-48}$$

3.7.4 全 3 時点検出確率

以上で導出された、

1) 3 つの独立な連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 $P_1(t_1)P_1(t_2)P_1(t_3) dt_1 dt_2 dt_3$

2) 2 つの独立な連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率

$$\{P_1(t_1)P_{2,\text{cor}}(t_2, t_3) + P_1(t_2)P_{2,\text{cor}}(t_1, t_3) + P_1(t_3)P_{2,\text{cor}}(t_1, t_2)\} dt_1 dt_2 dt_3$$

3) 同一の連鎖反応家系から成る 3 時点検出確率 $P_{3,\text{cor}}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$

の和を取ることで、最終的に全 3 時点検出確率 $P_3(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ が以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
& P_3(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\
&= \left[\begin{aligned}
& P_1(t_1)P_1(t_2)P_1(t_3) \\
& + \{P_1(t_1)P_{2,\text{cor}}(t_2, t_3) + P_1(t_2)P_{2,\text{cor}}(t_1, t_3) + P_1(t_3)P_{2,\text{cor}}(t_1, t_2)\} \\
& + \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mn} D_l D_m D_n}{-\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n} \left(\frac{e^{-\alpha_k(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_2)}}{\alpha_k + \alpha_l} - \frac{e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)}}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} \right) \\
& + \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow km}}{\alpha_j} \right) + S_{km} \right\} \frac{F_{k \rightarrow ln} D_l D_m D_n}{(\alpha_k + \alpha_m)(\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)} \\
& + \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kn}}{\alpha_j} \right) + S_{kn} \right\} \frac{F_{k \rightarrow lm} D_l D_m D_n}{(\alpha_k + \alpha_n)(\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)} \\
& + \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmn}}{\alpha_k} \right) + S_{lmn} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} e^{-\alpha_m(t_2-t_1) - \alpha_n(t_3-t_1)}
\end{aligned} \right] \\
& \times dt_1 dt_2 dt_3
\end{aligned} \tag{3-49}$$

3.8 空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた

Y、X 値の理論式導出

三次中性子相関法を用いて実際の未臨界度測定を行うためには、二次相関量 Y 値、三次相関量 X 値に現れる空間・中性子エネルギー・方向依存性の効果について十分検討する必要がある。これらの効果について検討するために、物理的直感法により導出された 1 時点検出確率 $P_1(t_1)dt_1$ 、2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2)dt_1dt_2$ 、3 時点検出確率 $P_3(t_1, t_2, t_3)dt_1dt_2dt_3$ を用いて、空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式の導出を行う。

3.8.1 中性子検出数の階乗モーメントの期待値

Y 、 X 値の理論式を求めるために、まずは 1~3 時点検出確率を利用して中性子検出数の階乗モーメントの期待値を導出する。ただし、定常状態の未臨界体系に対して検出時間幅 T の間だけ中性子の検出を行い、 $C(T)$ 個の中性子が検出されたとする。

3.8.1.1 中性子検出数の平均

1 時点検出確率 $P_1(t_1)dt_1$ を $0 \leq t_1 < T$ の範囲で積分することで、中性子検出数 $C(T)$ の期待値、すなわち中性子検出数の平均 $m(T)$ が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} m(T) &= \langle C(T) \rangle \\ &= \int_0^T dt_1 P_1(t_1) = C_R T \end{aligned} \quad (3-50)$$

$$C_R = \sum_n \frac{S_n D_n}{\alpha_n} \quad (3-51)$$

ただし上式において C_R は単位時間当りの中性子検出数（計数率）を意味する。

3.8.1.2 中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値

2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2)dt_1dt_2$ を $0 \leq t_1 < t_2$ 、 $0 \leq t_2 < T$ の範囲で積分することで、検出時間幅 T の間に検出された中性子数の対の数 $C(T)(C(T)-1)/2$ の期待値 $\langle C(T)(C(T)-1)/2 \rangle$ を得ることができる。従って中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値 $\langle C(T)(C(T)-1) \rangle$ が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} &\langle C(T)(C(T)-1) \rangle \\ &= 2 \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 P_2(t_1, t_2) \\ &= \langle C(T) \rangle^2 + 2 \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} \left(T - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n} \right) \end{aligned} \quad (3-52)$$

3.8.1.3 中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値

3 時点検出確率 $P_3(t_1, t_2, t_3)dt_1dt_2dt_3$ を $0 \leq t_1 < t_2$ 、 $0 \leq t_2 < t_3$ 、 $0 \leq t_3 < T$ の範囲で積分することで、検出時間幅 T の間に検出された中性子数の組(trio)の数 $C(T)(C(T)-1)(C(T)-2)/6$ の期待値

$\langle C(T)(C(T)-1)(C(T)-2)/6 \rangle$ を得ることができる。従って中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値 $\langle C(T)(C(T)-1)(C(T)-2) \rangle$ が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
\langle C(T)(C(T)-1)(C(T)-2) \rangle &= 6 \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 P_3(t_1, t_2, t_3) \\
&= 3 \langle C(T)(C(T)-1) \rangle \langle C(T) \rangle - 2 \langle C(T) \rangle^3 \\
&+ 6 \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mm} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_n (\alpha_k + \alpha_l) (-\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n)} \\
&\quad \times \left\{ T - \frac{1}{\alpha_k} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n} \right. \\
&\quad \left. + \left(T + \frac{1}{\alpha_n} \right) e^{-\alpha_n T} \delta_{kn} + \frac{\alpha_k e^{-\alpha_n T} - \alpha_n e^{-\alpha_k T}}{\alpha_k (\alpha_k - \alpha_n)} (1 - \delta_{kn}) \right\} \\
&+ 6 \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left[\left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mm}}{\alpha_k - \alpha_m - \alpha_n} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow km}}{\alpha_j} \right) + S_{km} \right\} \frac{F_{k \rightarrow ln}}{\alpha_k + \alpha_m} + \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kn}}{\alpha_j} \right) + S_{kn} \right\} \frac{F_{k \rightarrow lm}}{\alpha_k + \alpha_n} \right] \\
&\quad \times \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \left\{ T - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_m} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n} + \frac{\alpha_n}{\alpha_m} \frac{1 - e^{-(\alpha_m + \alpha_n) T}}{(\alpha_m + \alpha_n)} \right\} \\
&+ 6 \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmn}}{\alpha_k} \right) + S_{lmn} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \\
&\quad \times \left\{ T - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_m} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n} + \frac{\alpha_n}{\alpha_m} \frac{1 - e^{-(\alpha_m + \alpha_n) T}}{(\alpha_m + \alpha_n)} \right\} \tag{3-53}
\end{aligned}$$

3.8.2 二次相関量 Y 値

3.8.2.1 空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 値の理論式

中性子検出数の二次相関量 Y 値は、中性子検出数の平均 $m(T)$ と分散 $v(T)$ を用いて以下のように定義される。

$$Y(T) \equiv \frac{v(T)}{m(T)} - 1 \tag{3-54}$$

ここで分散 $v(T)$ が

$$v(T) \equiv \langle (C(T) - m(T))^2 \rangle = \langle C(T)C(T) \rangle - \langle C(T) \rangle^2 \tag{3-55}$$

と表されることを利用すれば、二次相関量 Y 値の定義式は以下のように表すこともできる。

$$Y(T) = \frac{\langle C(T)(C(T)-1) \rangle - \langle C(T) \rangle^2}{\langle C(T) \rangle} \tag{3-56}$$

以上より、中性子検出数の平均(3-50)式と二次階乗モーメントの期待値(3-52)式を利用することで、二次相関量 Y 値の理論式が以下のように導出される。

$$Y(T) = \frac{2}{C_R} \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mm}}{\alpha_l} \right) + S_{mm} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} \right) \tag{3-57}$$

導出された Y 値の理論式は、 n 次の中性子減衰定数 α_n を時定数とした

$$1 - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} \quad (3-58)$$

という関数の無限和で表されているのが分かる。この関数形は、従来導出された Y 値の理論式に現れた関数形と一致する。

3.8.2.2 Y 値の飽和値

上で導出された Y 値の理論式を利用することで、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 値の飽和値 Y_∞ が以下のように求められる。

$$Y_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} Y(T) = \frac{2}{C_R} \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} \quad (3-59)$$

ここで Y_∞ の理論式を整理するため、以下のように変形する。

$$\begin{aligned} Y_\infty &= \frac{2}{C_R} \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} \\ &= \frac{1}{C_R} \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_m \alpha_n} \left(1 + \frac{\alpha_m - \alpha_n}{\alpha_m + \alpha_n} \right) \end{aligned} \quad (3-60)$$

上式において、 $\alpha_m - \alpha_n$ の項は m 、 n を交換すると正負の符号が入れ替わるだけで絶対値は同じであることに気づくと、全ての m 、 n について和を取ると対称な m 、 n に対して打ち消しあって、結局ゼロになることが分かる。従って、 Y_∞ の理論式は最終的に以下のように得られる。

$$Y_\infty = \frac{1}{C_R} \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{mn} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_m \alpha_n} \quad (3-61)$$

次の章で詳しく述べるが、物理的直感法により以上のように得られた Y_∞ の理論式は、中性子検出確率のバランス方程式から導出される理論式と同じ結果になる。

3.8.3 三次相関量 X 値

3.8.3.1 空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた X 値の理論式

中性子検出数の三次相関量 X 値は、中性子検出数の平均 $m(T)$ と分散 $v(T)$ 、そして三次モーメント (third order central moment) $s(T)$ を用いて以下のように定義される。

$$X(T) \equiv \frac{s(T)}{m(T)} - 3 \frac{v(T)}{m(T)} + 2 \quad (3-62)$$

ここで三次モーメント $s(T)$ が

$$s(T) \equiv \langle (C(T) - m(T))^3 \rangle = \langle C(T)C(T)C(T) \rangle - 3\langle C(T)C(T) \rangle \langle C(T) \rangle + 2\langle C(T) \rangle^3 \quad (3-63)$$

と表されることを利用すれば、(3-55)式も利用することで、三次相関量 X 値の定義式は以下のように表すこともできる。

$$X(T) = \frac{\langle C(T)(C(T)-1)(C(T)-2) \rangle - 3\langle C(T)(C(T)-1) \rangle \langle C(T) \rangle + 2\langle C(T) \rangle^3}{\langle C(T) \rangle} \quad (3-64)$$

以上より、中性子検出数の平均(3-50)式、二次階乗モーメントの期待値(3-52)式、三次階乗モーメントの期待値(3-53)式を利用することで、三次相関量 X 値の理論式が以下のように導出される。

$$X(T) = X_2(T) + X_3(T) \quad (3-65)$$

$$\begin{aligned} X_2(T) = & \frac{6}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mn} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_n (\alpha_k + \alpha_l) (-\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n)} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_k T} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} + \left(1 + \frac{1}{\alpha_n T} \right) e^{-\alpha_n T} \delta_{kn} + \frac{\alpha_k e^{-\alpha_n T} - \alpha_n e^{-\alpha_k T}}{\alpha_k (\alpha_k - \alpha_n) T} (1 - \delta_{kn}) \right\} \\ & + \frac{6}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left[\left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mn}}{\alpha_k - \alpha_m - \alpha_n} \right. \\ & \left. + \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow km}}{\alpha_j} \right) + S_{km} \right\} \frac{F_{k \rightarrow ln}}{\alpha_k + \alpha_m} + \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kn}}{\alpha_j} \right) + S_{kn} \right\} \frac{F_{k \rightarrow lm}}{\alpha_k + \alpha_n} \right] \\ & \times \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} + \frac{\alpha_n}{\alpha_m} \frac{1 - e^{-(\alpha_m + \alpha_n) T}}{(\alpha_m + \alpha_n) T} \right\} \end{aligned} \quad (3-66)$$

$$\begin{aligned} X_3(T) = & \frac{6}{C_R} \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmn}}{\alpha_k} \right) + S_{lmn} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} + \frac{\alpha_n}{\alpha_m} \frac{1 - e^{-(\alpha_m + \alpha_n) T}}{(\alpha_m + \alpha_n) T} \right\} \end{aligned} \quad (3-67)$$

ただし上式において、 $X_{2\infty}(T)$ は X 値の二又成分を表し、連鎖反応家系が二又に2回分岐することで生じる三次相関を意味する。また $X_{3\infty}(T)$ は X 値の飽和値の三又成分を表し、連鎖反応家系が三又に1回分岐することで生じる三次相関を意味する。

3.8.3.2 X 値の飽和値

上で導出された X 値の理論式を利用することで、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における X 値の飽和値 X_∞ が以下のように求められる。

$$X_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} X(T) = X_{2\infty} + X_{3\infty} \quad (3-68)$$

$$\begin{aligned} X_{2\infty} = & \frac{6}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \left\{ \frac{1}{\alpha_k (\alpha_k + \alpha_l)} - \frac{1}{(\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \right\} \\ & \times \frac{F_{k \rightarrow mn} D_l D_m D_n}{\alpha_n (-\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n)} \\ & + \frac{6}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left[\left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow km}}{\alpha_j} \right) + S_{km} \right\} \frac{F_{k \rightarrow ln}}{\alpha_k + \alpha_m} + \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kn}}{\alpha_j} \right) + S_{kn} \right\} \frac{F_{k \rightarrow lm}}{\alpha_k + \alpha_n} \right] \\ & \times \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \end{aligned} \quad (3-69)$$

$$X_{3\infty} = \frac{6}{C_R} \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmm}}{\alpha_k} \right) + S_{lmm} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \quad (3-70)$$

ただし $X_{2\infty}$ は X 値の二又成分の飽和値、 $X_{3\infty}$ は X 値の三又成分の飽和値をそれぞれ表す。

$X_{2\infty}$ の理論式を整理するために、まずモードの添え字 l, m, n を交換して以下のように整理する。

$$\begin{aligned} X_{2\infty} &= \frac{6}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} F_{k \rightarrow nm} D_l D_m D_n \\ &\quad \times \left\{ \frac{\alpha_k + \alpha_l + \alpha_m + \alpha_n}{\alpha_k \alpha_n (\alpha_k + \alpha_l) (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha_n (\alpha_k + \alpha_l) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} + \frac{1}{\alpha_l (\alpha_k + \alpha_l) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \right\} \\ &= \frac{6}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow nm} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_l \alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} \end{aligned} \quad (3-71)$$

ここで $X_{2\infty}$ の理論式をさらに整理するために、以下のように変形する。

$$X_{2\infty} = \frac{3}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow nm} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_l \alpha_n \alpha_m} \left(1 + \frac{\alpha_m - \alpha_n}{\alpha_m + \alpha_n} \right) \quad (3-72)$$

上式において、 Y_{∞} の理論式を導出した際と同様に、 $\alpha_m - \alpha_n$ の項は m, n を交換すると正負の符号が入り替わるので、全ての m, n について和を取るとゼロになる。従って、 $X_{2\infty}$ の理論式は最終的に以下のように得られる。

$$X_{2\infty} = \frac{3}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow nm} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_l \alpha_n \alpha_m} \quad (3-73)$$

次に $X_{3\infty}$ の理論式を整理するために、以下のように変形する。

$$\begin{aligned} X_{3\infty} &= \frac{1}{C_R} \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmm}}{\alpha_k} \right) + S_{lmm} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_l \alpha_m \alpha_n} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{\alpha_l - \alpha_m}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} + \frac{\alpha_l - \alpha_n}{\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n} + \frac{3\alpha_l (\alpha_m - \alpha_n)}{(\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \right\} \end{aligned} \quad (3-74)$$

上式において、 $\alpha_l - \alpha_m$ 、 $\alpha_l - \alpha_n$ 、 $\alpha_m - \alpha_n$ の項はモードの添え字を交換すると正負の符号が入り替わるので、全ての l, m, n について和を取るとゼロになる。従って、 $X_{3\infty}$ の理論式は最終的に以下のように得られる。

$$X_{3\infty} = \frac{1}{C_R} \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmm}}{\alpha_k} \right) + S_{lmm} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_l \alpha_m \alpha_n} \quad (3-75)$$

次の章で詳しく述べるが、物理的直感法により以上のように得られた $X_{2\infty}$ 、 $X_{3\infty}$ の理論式は、中性子検出確率のバランス方程式から導出される理論式と同じ結果になる。

3.8.4 空間・中性子エネルギー・方向依存性の基本モード近似

3.8.4.1 Y、X 値の基本モード近似式

以上で導出された Y、X 値の理論式について、基本モード成分が優越であると仮定し、高次モード成分を全て無視すると、以下のような基本モード近似式を得ることができる。

1) 計数率

$$C_{R,0} = \frac{S_0 D_0}{\alpha_0} \quad (3-76)$$

2) 二次相関量 Y 値

$$Y_0(T) = Y_{\infty,0} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \quad (3-77)$$

$$Y_{\infty,0} = \left(\frac{F_{0 \rightarrow 00}}{\alpha_0} + \frac{S_{00}}{S_0} \right) \frac{D_0}{\alpha_0} \quad (3-78)$$

3) 三次相関量 X 値

$$X_0(T) = X_{2,0}(T) + X_{3,0}(T) \quad (3-79)$$

$$X_{2,0}(T) = X_{2\infty,0} \left(1 + e^{-\alpha_0 T} - 2 \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \quad (3-80)$$

$$X_{2\infty,0} = 3 \left(\frac{F_{0 \rightarrow 00}}{\alpha_0} + \frac{S_{00}}{S_0} \right) \frac{F_{0 \rightarrow 00}}{\alpha_0} \left(\frac{D_0}{\alpha_0} \right)^2 \quad (3-81)$$

$$X_{3,0}(T) = X_{3\infty,0} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha_0 T} + e^{-2\alpha_0 T}}{2\alpha_0 T} \right) \quad (3-82)$$

$$X_{3\infty,0} = \left(\frac{F_{0 \rightarrow 000}}{\alpha_0} + \frac{S_{000}}{S_0} \right) \left(\frac{D_0}{\alpha_0} \right)^2 \quad (3-83)$$

以上で導出された Y、X 値の基本モード近似式は、関数形としては従来の 1 点炉・エネルギー-1 群近似で導出される Y、X 値の理論式と全く同じである。しかし、Y、X 値の基本モード近似式の飽和値には基本モード固有関数による空間・中性子エネルギー・方向の効果が含まれる。従って、Y、X 値の飽和値を考えた場合には、基本モード近似と 1 点炉近似は全く異なることに注意しなければならない。

3.8.4.2 基本モード近似式を用いた三次中性子相関法の解析公式

Y、X 値の基本モード近似式を利用して、三次中性子相関法の解析公式を補正することができる。まず基本モードの中性子減衰定数 α_0 が未臨界度 ($-\rho$) により以下のように表されることを利用する。

$$\alpha_0 = \frac{(-\rho)}{\Lambda} \quad (3-84)$$

ただし Λ は中性子生成時間を表す。 Λ の厳密な定義を考えるために、以下のように定義される中性子数密度の k_{eff} 固有値方程式を考える。

$$\mathbf{A}_v n_k(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{F}_v n_k(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-85)$$

$$\mathbf{A}_v \equiv v(E) \boldsymbol{\Omega} \nabla + v(E) \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E') \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-86)$$

$$\mathbf{F}_v \equiv \frac{\chi_f(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E') \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \quad (3-87)$$

ただし n_k は k_{eff} 固有値方程式の固有関数、 \mathbf{A}_v は吸収・散乱・漏れによる中性子消滅演算子、 \mathbf{F}_v は核分裂による中性子生成演算子を表す。ここで、基本モードの α 固有値方程式

$$(\mathbf{A}_v - \mathbf{F}_v) \psi_0(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \alpha \psi_0(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-88)$$

の両辺に k_{eff} 固有値方程式の随伴方程式の随伴固有関数 n_k^\dagger をかけて、全空間・エネルギー・方向で積分して整理すれば、 Λ は以下のように定義すべきなのが分かる。

$$\Lambda \equiv \frac{\int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} n_k^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \psi_0(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})}{\int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} n_k^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{F}_v \psi_0(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})} \quad (3-89)$$

Y 、 X 値の基本モード近似式と(3-84)式を利用することで、三次中性子相関法の解析公式が以下のように得られる。

$$\frac{X_\infty}{Y_\infty^2} \equiv \frac{X_{2\infty,0} + X_{3\infty,0}}{Y_{\infty,0}^2} = \frac{3}{1 + \delta_{2,0}(-\rho)} + F_0 \frac{\{1 + \delta_{3,0}(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_{2,0}(-\rho)\}^2} \quad (3-90)$$

$$\delta_{2,0} \equiv \frac{S_{00}}{S_0} \frac{1/\Lambda}{F_{0 \rightarrow 00}} \quad (3-91)$$

$$\delta_{3,0} \equiv \frac{S_{000}}{S_0} \frac{1/\Lambda}{F_{0 \rightarrow 000}} \quad (3-92)$$

$$F_0 \equiv \frac{F_{0 \rightarrow 000}/\Lambda}{(F_{0 \rightarrow 00})^2} \quad (3-93)$$

上式に現れる定数の定義を以下に示しておく。

$$S_0 \equiv \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q p_s(q) \Psi_{s,0}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (3-94)$$

$$S_{00} \equiv \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q(q-1) p_s(q) (\Psi_{s,0}^\dagger(\mathbf{r}))^2 \quad (3-95)$$

$$S_{000} \equiv \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q(q-1)(q-2) p_s(q) (\Psi_{s,0}^\dagger(\mathbf{r}))^3 \quad (3-96)$$

$$\Psi_{s,0}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \psi_0^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-97)$$

$$F_{0 \rightarrow 00} \equiv \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \psi_f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^\infty \nu(\nu-1) p_f(\nu, E) (\Psi_{f,0}^\dagger(\mathbf{r}))^2 \quad (3-98)$$

$$F_{0 \rightarrow 000} \equiv \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \psi_k(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^\infty \nu(\nu-1)(\nu-2) p_f(\nu, E) (\Psi_{f,0}^\dagger(\mathbf{r}))^3 \quad (3-99)$$

$$\Psi_{f,0}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_f(E)}{4\pi} \psi_0^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-100)$$

以上で現れる三次中性子相関法の解析公式は、従来 1 点炉・エネルギー 1 群近似により導出された解析公式と形は同じであるが、定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 に基本モード固有関数による空間・中性子エネルギー・方向の効果が含まれている。従って、上式を利用することで三次中性子相関法による未臨界度の測定結果を改善できる可能性がある。

3.9 データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式導出

実際に Y 、 X 値を測定する際の課題として、 Y 、 X 値の測定値に現れるデータ数の有限性の効果が挙げられる。空間・中性子エネルギー・方向を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出する際、暗黙のうちに分散および三次モーメントとして、それらの期待値（言い換えれば真値）を考えてきた。しかし実際の測定では測定時間が限られるため、 Y 、 X 値を測定するのに必要となる分散および三次モーメントは有限個のデータから推定される。このデータ数が十分多くないと、真の分散、三次モーメントを正しく推定できないために、 Y 、 X 値が真値に比べて系統的にずれてしまう。このようなデータ数の有限性の効果について検討するために、物理的直感法により導出された 1 時点検出確率 $P_1(t_1)dt_1$ 、2 時点検出確率 $P_2(t_1, t_2)dt_1dt_2$ 、3 時点検出確率 $P_3(t_1, t_2, t_3)dt_1dt_2dt_3$ を用いて、データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式の導出を行う^[21,22,23]。

3.9.1 中性子検出数の測定法

データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式の導出するために、以下の図で表されるような中性子検出数の時系列データ測定を行うことを想定する。

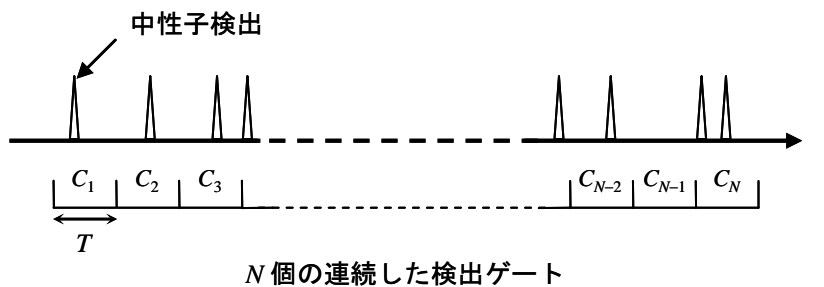


Fig. 3-17 中性子検出数の時系列データ測定法

Fig. 3-17 で示されたように、検出時間幅 T の連続した N 個の検出ゲートにより中性子検出数の時系列データを測定することを想定する。これは基本ゲート幅 T 、ゲート数 N のマルチチャンネルスケーラー(MCS)を用いた中性子検出数の時系列データ測定に対応する。定常状態の未臨界体系に対してこのような中性子検出数の測定を行い、 i 番目の検出ゲートの測定時間 $(i-1)T \leq t < iT$ の間に検出された中性子数を C_i と表すことにする。

Fig. 3-17 で示された中性子検出数の時系列データ測定法では、連続して中性子検出数の時系列データを測定するので、限られた測定時間内で効率良くデータを収集することができる。さらに

Fig. 3-18 のように、隣接した検出ゲートを連結させることで、異なるゲート時間幅の時系列データを得ることができる。このような時系列データの処理をバンチング処理と言う。例えば検出時間幅 T の連続した N 個の時系列データの場合、隣接した n 個の時系列データを連結することで検出時間幅 nT の時系列データを新たに測定し直すことなく得ることができる。ただし N 個のデータを n 個ずつ連結させるので、その時系列データの数は $[N/n]_{\text{Gauss}}$ 個となる ($[]_{\text{Gauss}}$ はガウス記号を表す)。

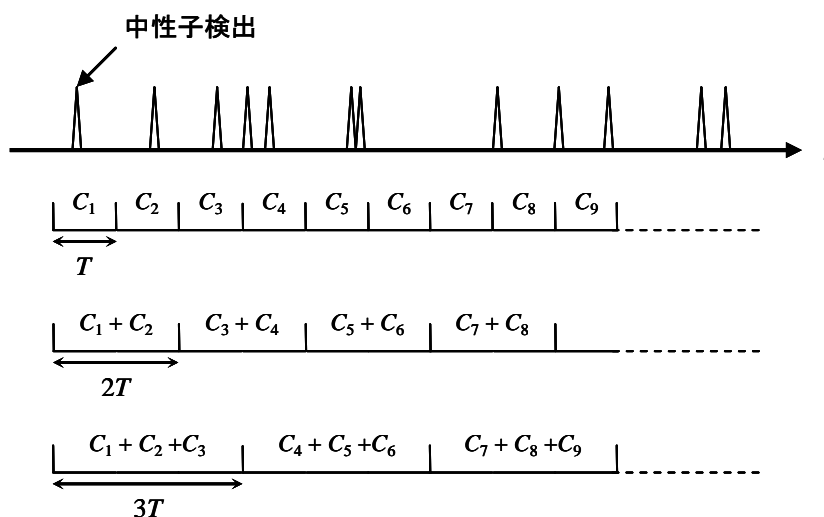


Fig. 3-18 時系列データのバンチング処理

しかし中性子検出数の分散、三次モーメントを推定する際、Fig. 3-17 で示された中性子検出数の時系列データ測定法には以下のような問題点がある。

- 1) 連続して中性子検出数の測定を行うので、各データの間には相関があり独立ではない。
- 2) バンチング処理を利用した場合に、検出時間幅 nT が大きくなるにつれデータ数が n に反比例して減少する。

以上の問題点が Y 、 X 値に及ぼす影響を検討するために、 Y 、 X 値を測定するのに 1) 標本分散、標本三次モーメントを用いた場合、および 2) 不偏分散、不偏三次モーメントを用いた場合について、データ数 N を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を以下で導出する。ただしデータ数の有限性の効果のみを取り扱うために、 Y 、 X 値の理論式を導出する際には基本モード近似を用いることにする。

3.9.2 1～3 時点検出確率の基本モード近似式

高次モード成分を無視することにより、1～3 時点検出確率の基本モード近似式 $P_{1,0}(t_1)dt_1$ 、 $P_{2,0}(t_1, t_2)dt_1dt_2$ 、 $P_{3,0}(t_1, t_2, t_3)dt_1dt_2dt_3$ はそれぞれ以下のように得られる。

1) 1 時点検出確率

$$P_{1,0}(t_1)dt_1 = C_{R,0} dt_1 \quad (3-101)$$

2) 2 時点検出確率

$$P_{2,0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \left\{ C_{R,0}^2 + \frac{\alpha_0}{2} C_{R,0} Y_{\infty,0} e^{-\alpha_0(t_2-t_1)} \right\} dt_1 dt_2 \quad (3-102)$$

3) 3 時点検出確率

$$P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 = \left[\begin{aligned} & C_{R,0}^3 + \frac{\alpha_0}{2} C_{R,0}^2 Y_{\infty,0} \left\{ e^{-\alpha_0(t_3-t_2)} + e^{-\alpha_0(t_3-t_1)} + e^{-\alpha_0(t_2-t_1)} \right\} \\ & + \frac{\alpha_0^2}{6} C_{R,0} X_{2\infty,0} e^{-\alpha_0(t_3-t_1)} + \frac{\alpha_0^2}{3} C_{R,0} X_{3\infty,0} e^{-\alpha_0(t_3+t_2-2t_1)} \end{aligned} \right] dt_1 dt_2 dt_3 \quad (3-103)$$

ただし上式において、 $C_{R,0}$ は計数率、 $Y_{\infty,0}$ は Y 値の飽和値、 $X_{2\infty,0}$ は X 値の二又成分の飽和値、 $X_{3\infty,0}$ は X 値の三又成分の飽和値をそれぞれ表す。

3.9.3 中性子検出数のモーメントの期待値

データ数 N を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を求めるために、まずは 1~3 時点検出確率を利用して中性子検出数のモーメントの期待値を導出する。

3.9.3.1 中性子検出数の期待値

1 時点検出確率 $P_{1,0}(t_1) dt_1$ を $(i-1)T \leq t_1 < iT$ の範囲で積分することで、 i 番目のゲートで検出された中性子数 C_i の期待値 $\langle C_i \rangle$ が以下のように得られる。

$$\langle C_i \rangle = \int_{(i-1)T}^{iT} dt_1 P_{1,0}(t_1) = C_{R,0} T \quad (3-104)$$

上式より $\langle C_i \rangle$ は i に依存しないので、どの検出ゲートに対しても中性子検出数の期待値 $\langle C_i \rangle$ は等しくなる。

3.9.3.2 中性子検出数の二次モーメント

1) $C_i(C_i - 1)$ の期待値

2 時点検出確率 $P_{2,0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ を $(i-1)T \leq t_1 < t_2$ 、 $(i-1)T \leq t_2 < iT$ の範囲で積分することで、 i 番目のゲートで検出された中性子数の対の数 $C_i(C_i - 1)/2$ の期待値を得ることができる。従って中性子検出数 $C_i(C_i - 1)$ の二次階乗モーメントの期待値 $\langle C_i(C_i - 1) \rangle$ が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \langle C_i(C_i - 1) \rangle &= 2 \int_{(i-1)T}^{iT} dt_2 \int_{(i-1)T}^{t_2} dt_1 P_{2,0}(t_1, t_2) \\ &= \langle C_i \rangle^2 + \langle C_i \rangle Y_{\infty,0} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \end{aligned} \quad (3-105)$$

上式より $\langle C_i(C_i - 1) \rangle$ は i に依存しないので、どの検出ゲートに対しても中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値 $\langle C_i(C_i - 1) \rangle$ は等しくなる。

2) $C_i C_{i+j}$ の期待値

2 時点検出確率 $P_{2,0}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ を $(i-1)T \leq t_1 < iT$ 、 $(i+j-1)T \leq t_2 < (i+j)T$ の範囲で積分することで、 i 番目と $i+j$ 番目のゲートで検出された中性子数の対の数 $C_i C_{i+j}$ の期待値を得ることができる。従って、中性子検出数の二次モーメント $C_i C_{i+j}$ の期待値が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \langle C_i C_{i+j} \rangle &= \int_{(i+j-1)T}^{(i+j)T} dt_2 \int_{(i-1)T}^{iT} dt_1 P_{2,0}(t_1, t_2) \\ &= \langle C_i \rangle^2 + \langle C_i \rangle Y_{\infty,0} \frac{(1 - e^{-\alpha_0 T})^2}{2\alpha_0 T} e^{-\alpha_0(j-1)T} \end{aligned} \quad (3-106)$$

上式から $C_i C_{i+j}$ の期待値が

$$\langle C_i C_{i+j} \rangle > \langle C_i \rangle^2 = \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \quad (3-107)$$

の条件を満たすのが分かる。ここで C_i と C_{i+j} の共分散 $\text{cov}(C_i, C_{i+j})$ が

$$\begin{aligned} \text{cov}(C_i, C_{i+j}) &\equiv \langle (C_i - \langle C_i \rangle)(C_{i+j} - \langle C_{i+j} \rangle) \rangle \\ &= \langle C_i C_{i+j} \rangle - \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \end{aligned} \quad (3-108)$$

と定義されるので、(3-107)式より C_i と C_{i+j} の共分散が $\text{cov}(C_i, C_{i+j}) > 0$ となることが分かる。これは中性子検出数を連続して測定することにより C_i と C_{i+j} の間に正の相関が生じることを意味する。

この二次モーメント $C_i C_{i+j}$ の期待値は $j \rightarrow \infty$ もしくは $T \rightarrow \infty$ の極限で

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle C_i C_{i+j} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle C_i C_{i+j} \rangle = \langle C_i \rangle^2 = \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \quad (3-109)$$

となる。これは中性子検出数の測定を行う際に、1 回 1 回の測定の間には十分な時間間隔があるか、あるいは中性子検出時間幅 T が十分大きければ、 C_i と C_{i+j} の共分散 $\text{cov}(C_i, C_{i+j})$ がゼロとなり、 C_i と C_{i+j} の間に相関がないとみなすことができることを意味する。

3.9.3.3 中性子検出数の三次モーメント

1) $C_i(C_i - 1)(C_i - 2)$ の期待値

3 時点検出確率 $P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ を $(i-1)T \leq t_1 < t_2$ 、 $(i-1)T \leq t_2 < t_3$ 、 $(i-1)T \leq t_3 < iT$ の範囲で積分することで、 i 番目のゲートで検出された中性子数の組(trio)の数 $C_i(C_i - 1)(C_i - 2)/6$ の期待値を得ることができる。従って中性子検出数の三次階乗モーメント $C_i(C_i - 1)(C_i - 2)$ の期待値 $\langle C_i(C_i - 1)(C_i - 2) \rangle$ が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \langle C_i(C_i - 1)(C_i - 2) \rangle &= 6 \int_{(i-1)T}^{iT} dt_3 \int_{(i-1)T}^{t_3} dt_2 \int_{(i-1)T}^{t_2} dt_1 P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) \\ &= \langle C_i \rangle^3 + 3 \langle C_i \rangle^2 Y_{\infty,0} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \\ &\quad + \langle C_i \rangle X_{2\infty,0} \left(1 + e^{-\alpha_0 T} - 2 \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) + \langle C_i \rangle X_{3\infty,0} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha_0 T} + e^{-2\alpha_0 T}}{2\alpha_0 T} \right) \end{aligned} \quad (3-110)$$

上式より $\langle C_i(C_i - 1)(C_i - 2) \rangle$ は i に依存しないので、どの検出ゲートに対しても中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値 $\langle C_i(C_i - 1)(C_i - 2) \rangle$ は等しくなる。

2) $C_i(C_i-1)C_{i+j}$ の期待値

3 時点検出確率 $P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ を $(i-1)T \leq t_1 < t_2$ 、 $(i-1)T \leq t_2 < iT$ 、 $(i+j-1)T \leq t_3 < (i+j)T$ の範囲で積分することで、 i 番目と $i+j$ 番目のゲートで検出された中性子数の組(trio)の数 $C_i(C_i-1)C_{i+j}/2$ の期待値を得ることができる。従って中性子検出数の三次モーメント $C_i(C_i-1)C_{i+j}$ の期待値が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \langle C_i(C_i-1)C_{i+j} \rangle &= 2 \int_{(i+j-1)T}^{(i+j)T} dt_3 \int_{(i-1)T}^{iT} dt_2 \int_{(i-1)T}^{t_2} dt_1 P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) \\ &= \langle C_i \rangle^3 + \langle C_i \rangle^2 Y_{\infty,0} \left\{ 1 - \frac{1-e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} + \frac{(1-e^{-\alpha_0 T})^2}{\alpha_0 T} e^{-\alpha_0(j-1)T} \right\} \\ &\quad + \frac{\langle C_i \rangle}{3} X_{2\infty,0} \frac{(1-e^{-\alpha_0 T}) \{1 - (1+\alpha_0 T)e^{-\alpha_0 T}\}}{\alpha_0 T} e^{-\alpha_0(j-1)T} + \frac{\langle C_i \rangle}{3} X_{3\infty,0} \frac{(1-e^{-\alpha_0 T})^3}{\alpha_0 T} e^{-\alpha_0(j-1)T} \end{aligned} \quad (3-111)$$

この三次モーメント $C_i(C_i-1)C_{i+j}$ の期待値は $j \rightarrow \infty$ もしくは $T \rightarrow \infty$ の極限において、(3-105)式を利用することにより、

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle C_i(C_i-1)C_{i+j} \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle C_i(C_i-1)C_{i+j} \rangle \\ &= \langle C_i \rangle^3 + \langle C_i \rangle^2 Y_{\infty,0} \left(1 - \frac{1-e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \\ &= \langle C_i \rangle^3 + \langle C_i \rangle \{ \langle C_i(C_i-1) \rangle - \langle C_i \rangle^2 \} \\ &= \langle C_i(C_i-1) \rangle \langle C_i \rangle \\ &= \langle C_i(C_i-1) \rangle \langle C_{i+j} \rangle \end{aligned} \quad (3-112)$$

となる。これは中性子検出数の測定を行う際に、1回1回の測定の間には十分な時間間隔があるか、あるいは中性子検出時間幅 T が十分大きければ、 $C_i(C_i-1)$ と C_{i+j} の共分散 $\text{cov}(C_i(C_i-1), C_{i+j})$ がゼロとなり、 $C_i(C_i-1)$ と C_{i+j} の間に相関がないとみなすことができることを意味する。

3) $C_i C_{i+j} (C_{i+j}-1)$ の期待値

上で述べた $C_i(C_i-1)C_{i+j}$ の期待値を導出する場合と同様に、3 時点検出確率 $P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ を $(i-1)T \leq t_1 < iT$ 、 $(i+j-1)T \leq t_2 < t_3$ 、 $(i+j-1)T \leq t_3 < (i+j)T$ の範囲で積分することで、 i 番目と $i+j$ 番目のゲートで検出された中性子数の組(trio)の数 $C_i C_{i+j} (C_{i+j}-1)/2$ の期待値を得ることができる。従って中性子検出数の三次モーメント $C_i C_{i+j} (C_{i+j}-1)$ の期待値が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} \langle C_i C_{i+j} (C_{i+j}-1) \rangle &= 2 \int_{(i+j-1)T}^{(i+j)T} dt_3 \int_{(i+j-1)T}^{t_3} dt_2 \int_{(i-1)T}^{iT} dt_1 P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) \\ &= \langle C_i \rangle^3 + \langle C_i \rangle^2 Y_{\infty,0} \left\{ 1 - \frac{1-e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} + \frac{(1-e^{-\alpha_0 T})^2}{\alpha_0 T} e^{-\alpha_0(j-1)T} \right\} \\ &\quad + \frac{\langle C_i \rangle}{3} X_{2\infty,0} \frac{(1-e^{-\alpha_0 T}) \{1 - (1+\alpha_0 T)e^{-\alpha_0 T}\}}{\alpha_0 T} e^{-\alpha_0(j-1)T} \\ &\quad + \frac{\langle C_i \rangle}{6} X_{3\infty,0} \frac{(1-e^{-\alpha_0 T})^2 (1-e^{-2\alpha_0 T})}{\alpha_0 T} e^{-2\alpha_0(j-1)T} \end{aligned} \quad (3-113)$$

この三次モーメント $C_i C_{i+j} (C_{i+j}-1)$ の期待値は $j \rightarrow \infty$ もしくは $T \rightarrow \infty$ の極限で、(3-105)式を利用することにより、

$$\begin{aligned}
\lim_{j \rightarrow \infty} \langle C_i C_{i+j} (C_{i+j} - 1) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle C_i C_{i+j} (C_{i+j} - 1) \rangle \\
&= \langle C_i \rangle^3 + \langle C_i \rangle^2 Y_{\infty,0} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \\
&= \langle C_i \rangle^3 + \langle C_i \rangle \left\{ \langle C_i (C_i - 1) \rangle - \langle C_i \rangle^2 \right\} \\
&= \langle C_i \rangle \langle C_i (C_i - 1) \rangle \\
&= \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} (C_{i+j} - 1) \rangle
\end{aligned} \tag{3-114}$$

となる。これは中性子検出数の測定を行う際に、1回1回の測定の間には十分な時間間隔があるか、あるいは中性子検出時間幅 T が十分大きければ、 C_i と $C_{i+j} (C_{i+j} - 1)$ の共分散 $\text{cov}(C_i, C_{i+j} (C_{i+j} - 1))$ がゼロとなり、 C_i と $C_{i+j} (C_{i+j} - 1)$ の間に相関がないとみなすことができることを意味する。

4) $C_i C_{i+j} C_{i+j+k}$ の期待値

3 時点検出確率 $P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ を $(i-1)T \leq t_1 < iT$ 、 $(i+j-1)T \leq t_2 < (i+j)T$ 、 $(i+j+k-1)T \leq t_3 < (i+j+k)T$ の範囲で積分することで、 i 番目、 $i+j$ 番目、 $i+j+k$ 番目のゲートで検出された中性子数の組(trio)の数 $C_i C_{i+j} C_{i+j+k}$ の期待値を得ることができる。従って中性子検出数の三次モーメント $C_i C_{i+j} C_{i+j+k}$ の期待値が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
\langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle &= \int_{(i+j+k-1)T}^{(i+j+k)T} dt_3 \int_{(i+j-1)T}^{(i+j)T} dt_2 \int_{(i-1)T}^{iT} dt_1 P_{3,0}(t_1, t_2, t_3) \\
&= \langle C_i \rangle^3 + \langle C_i \rangle^2 Y_{\infty,0} \frac{(1 - e^{-\alpha_0 T})^2}{2\alpha_0 T} \{ e^{-\alpha_0(j-1)T} + e^{-\alpha_0(k-1)T} + e^{-\alpha_0(j+k-1)T} \} \\
&\quad + \frac{\langle C_i \rangle}{6} X_{2\infty,0} (1 - e^{-\alpha_0 T})^2 e^{-\alpha_0(j+k-1)T} \\
&\quad + \frac{\langle C_i \rangle}{6} X_{3\infty,0} \frac{(1 - e^{-\alpha_0 T})^2 (1 - e^{-2\alpha_0 T})}{\alpha_0 T} e^{-\alpha_0(2j+k-2)T}
\end{aligned} \tag{3-115}$$

この三次モーメント $C_i C_{i+j} C_{i+j+k}$ の期待値は $j \rightarrow \infty$ かつ $k \rightarrow \infty$ 、もしくは $T \rightarrow \infty$ の極限で、

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} \langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle = \langle C_i \rangle^3 = \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle \tag{3-116}$$

となる。これは中性子検出数の測定を行う際に、1回1回の測定の間には十分な時間間隔があるか、あるいは中性子検出時間幅 T が十分大きければ、 C_i 、 C_{i+j} 、 C_{i+j+k} の間に相関がないとみなすことができることを意味する。

3.9.4 標本分散と標本三次モーメントを用いた場合の Y 、 X 値の理論式

実際に Y 、 X 値を測定する際に、標本分散 v_s 、標本三次モーメント s_s を用いた場合についてデータ数 N を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出する。まず標本分散 v_s 、標本三次モーメント s_s の定義について述べ、それらの期待値 $\langle v_s \rangle$ 、 $\langle s_s \rangle$ を求める。次に標本分散 v_s 、標本三次モーメント s_s を用いて測定された Y 、 X 値の期待値を考え、上で求められた中性子検出数のモーメントの期待値を利用することにより、データ数 N を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出することができる。

3.9.4.1 標本分散

検出時間幅 T の連続した N 個の検出ゲートにより測定された中性子検出数の時系列データ $C_i (i=1, 2, \dots, N)$ に対して、中性子検出数の平均 \bar{C} は以下のように求められる。

$$\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad (3-117)$$

標本分散 v_s は中性子検出数の平均 \bar{C} を用いて、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} v_s &\equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \right)^2 \end{aligned} \quad (3-118)$$

中性子検出数の分散を評価する際に標本分散 v_s を用いたとすると、得られた標本分散 v_s の期待値 $\langle v_s \rangle$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \langle v_s \rangle &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^2 \right\rangle - \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^2 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N C_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} C_i C_{i+j} \right) \right\rangle \\ &= \frac{N-1}{N} \langle C_i^2 \rangle - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \langle C_i C_{i+j} \rangle \\ &= \frac{N-1}{N} \langle C_i(C_i - 1) \rangle - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \langle C_i C_{i+j} \rangle + \frac{N-1}{N} \langle C_i \rangle \end{aligned} \quad (3-119)$$

ここで分散 v の期待値（あるいは真値） v_{true} が

$$\begin{aligned} v_{\text{true}} &= \langle (C_i - \langle C_i \rangle)^2 \rangle \\ &= \langle C_i^2 \rangle - \langle C_i \rangle^2 \\ &= \langle C_i(C_i - 1) \rangle - \langle C_i \rangle^2 + \langle C_i \rangle \end{aligned} \quad (3-120)$$

と表されることを利用すると、標本分散の期待値 $\langle v_s \rangle$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \langle v_s \rangle &= \frac{N-1}{N} v_{\text{true}} + \frac{N-1}{N} \langle C_i \rangle^2 - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \langle C_i C_{i+j} \rangle \\ &= \frac{N-1}{N} v_{\text{true}} - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\langle C_i C_{i+j} \rangle - \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \right) \\ &= \frac{N-1}{N} v_{\text{true}} - \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \text{cov}(C_i, C_{i+j}) \end{aligned} \quad (3-121)$$

上式より、標本分散 v_s を用いて分散を評価した場合、データ数 N が十分多ければ真値 v_{true} を求めることができるが、仮に C_i と C_{i+j} の間に相関がないとしても（すなわち $\text{cov}(C_i, C_{i+j}) = 0$ ）、 N が少ない場合には真値 v_{true} に比べて過小評価してしまうのが分かる。また、実際には C_i と C_{i+j} の間に相関があるため、これらの相関（すなわち $\text{cov}(C_i, C_{i+j})$ ）によっても標本分散の期待値は過小評価されることが分かる。

3.9.4.2 標本三次モーメント

標本三次モーメント s_s も、標本分散 v_s の場合と同様に、中性子検出数の平均 \bar{C} を用いて以下のよう定義される。

$$\begin{aligned} s_s &\equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})^3 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^3 - 3 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^2 \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \right) + 2 \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \right)^3 \end{aligned} \quad (3-122)$$

中性子検出数の三次モーメントを評価する際に標本三次モーメント s_s を用いたとすると、得られた標本三次モーメント s_s の期待値 $\langle s_s \rangle$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \langle s_s \rangle &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^3 \right\rangle - 3 \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^2 \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \right) \right\rangle + 2 \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \right)^3 \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^3 \right\rangle - 3 \left\langle \frac{1}{N^2} \left\{ \sum_{i=1}^N C_i^3 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} (C_i^2 C_{i+j} + C_i C_{i+j}^2) \right\} \right\rangle \\ &\quad + 2 \left\langle \frac{1}{N^3} \left(\sum_{i=1}^N C_i^3 + 3 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} (C_i^2 C_{i+j} + C_i C_{i+j}^2) + 6 \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \right) \right\rangle \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \langle C_i^3 \rangle - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\langle C_i^2 C_{i+j} \rangle + \langle C_i C_{i+j}^2 \rangle \right) \\ &\quad + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle \\ &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \langle C_i (C_i - 1) (C_i - 2) \rangle \\ &\quad - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left\{ \langle C_i (C_i - 1) C_{i+j} \rangle + \langle C_i C_{i+j} (C_{i+j} - 1) \rangle \right\} \\ &\quad + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle \\ &\quad + 3 \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \langle C_i (C_i - 1) \rangle - 6 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \langle C_i C_{i+j} \rangle \\ &\quad + \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \langle C_i \rangle \end{aligned} \quad (3-123)$$

ここで三次モーメント s の期待値 (真の値) s_{true} が

$$\begin{aligned} s_{\text{true}} &= \left\langle (C_i - \langle C_i \rangle)^3 \right\rangle \\ &= \langle C_i^3 \rangle - 3 \langle C_i^2 \rangle \langle C_i \rangle + 2 \langle C_i \rangle^3 \\ &= \langle C_i (C_i - 1) (C_i - 2) \rangle - 3 \langle C_i (C_i - 1) \rangle \langle C_i \rangle + 2 \langle C_i \rangle^3 \\ &\quad + 3 \langle C_i (C_i - 1) \rangle - 3 \langle C_i \rangle^2 + \langle C_i \rangle \end{aligned} \quad (3-124)$$

と表されることを利用すると、標本三次モーメントの期待値 $\langle s_s \rangle$ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 \langle s_S \rangle &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} s_{\text{true}} + 3 \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \langle C_i^2 \rangle \langle C_i \rangle - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left\{ \langle C_i^2 C_{i+j} \rangle + \langle C_i C_{i+j}^2 \rangle \right\} \\
 &\quad - 2 \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} \langle C_i \rangle^3 + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle \\
 &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} s_{\text{true}} - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left\{ \left(\langle C_i^2 C_{i+j} \rangle - \langle C_i^2 \rangle \langle C_{i+j} \rangle \right) + \left(\langle C_i C_{i+j}^2 \rangle - \langle C_i \rangle \langle C_{i+j}^2 \rangle \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \left(\langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle - \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle \right) \\
 &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} s_{\text{true}} - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\text{cov}(C_i^2, C_{i+j}) + \text{cov}(C_i, C_{i+j}^2) \right) \\
 &\quad + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \left(\langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle - \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle \right)
 \end{aligned} \tag{3-125}$$

ここで C_i 、 C_{i+j} 、 C_{i+j+k} の間の三次相関を表す量として、 $\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k})$ (third order cumulant) を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
 \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) &\equiv \left(\langle (C_i - \langle C_i \rangle) (C_{i+j} - \langle C_{i+j} \rangle) (C_{i+j+k} - \langle C_{i+j+k} \rangle) \rangle \right) \\
 &= \langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle - \langle C_i C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle - \langle C_i C_{i+j+k} \rangle \langle C_{i+j} \rangle - \langle C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle \langle C_i \rangle + 2 \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle
 \end{aligned} \tag{3-126}$$

上で定義される $\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k})$ は C_i 、 C_{i+j} 、 C_{i+j+k} の間に相関がなければゼロとなる。

$\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k})$ を用いて、 $\langle s_S \rangle$ をさらに整理することで結局以下のようにになる。

$$\begin{aligned}
 \langle s_S \rangle &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} s_{\text{true}} - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\text{cov}(C_i^2, C_{i+j}) + \text{cov}(C_i, C_{i+j}^2) \right) \\
 &\quad + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \left(\begin{array}{l} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) \\ + \langle C_i C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle + \langle C_i C_{i+j+k} \rangle \langle C_{i+j} \rangle + \langle C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle \langle C_i \rangle \\ - 3 \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle \end{array} \right) \\
 &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} s_{\text{true}} - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\text{cov}(C_i^2, C_{i+j}) + \text{cov}(C_i, C_{i+j}^2) \right) \\
 &\quad + 12 \frac{N-2}{N^3} \langle C_i \rangle \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\langle C_i C_{i+j} \rangle - \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \right) + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) \\
 &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} s_{\text{true}} - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\text{cov}(C_i^2, C_{i+j}) + \text{cov}(C_i, C_{i+j}^2) \right) \\
 &\quad + 12 \frac{N-2}{N^3} \langle C_i \rangle \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\text{cov}(C_i, C_{i+j}) \right) + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) \\
 &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} s_{\text{true}} - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left\{ \left(\text{cov}(C_i^2, C_{i+j}) - 2 \langle C_i \rangle \text{cov}(C_i, C_{i+j}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\text{cov}(C_i, C_{i+j}^2) - 2 \langle C_i \rangle \text{cov}(C_i, C_{i+j}) \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) \\
 &= \frac{(N-1)(N-2)}{N^2} s_{\text{true}} - 3 \frac{N-2}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \left(\text{cum}_3(C_i, C_i, C_{i+j}) + \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j}) \right) \\
 &\quad + \frac{12}{N^3} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k})
 \end{aligned} \tag{3-127}$$

標本分散 v_S の場合と同様に、標本分散 s_S を用いて三次モーメントを評価した場合も、データ数 N が十分多ければ真値 s_{true} を求めることができるが、仮に C_i と C_{i+j} の C_{i+j+k} の間に相関がないとしても（すなわち $\text{cum}_3(C_i, C_i, C_{i+j})=0$ & $\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j})=0$ & $\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k})=0$ ）、 N が少ない場合には真値 s_{true} から系統的にずれてしまうことが分かる。また実際には C_i 、 C_{i+j} 、 C_{i+j+k} の間に相関があるため、これらの相関によっても標本三次モーメントの期待値が真値から系統的にずれることが分かる。

3.9.4.3 標本分散を用いた場合の Y 値の期待値

上で述べた標本分散 v_S を用いて評価された Y 値を Y_S 値と表すことにすると、 Y_S 値は以下のように定義される。

$$Y_S(T) \equiv \frac{v_S}{C} - 1 \quad (3-128)$$

上で定義された Y_S 値の分母、分子の期待値をそれぞれとることで、 Y_S 値の期待値 $\langle Y_S(T) \rangle$ を考えることにする。

$$\langle Y_S(T) \rangle = \frac{\langle v_S \rangle}{\langle C_i \rangle} - 1 \quad (3-129)$$

上式に標本分散の期待値 $\langle v_S \rangle$ を代入し、上で導出された中性子検出数の 2 次モーメントの期待値を代入することにより、 Y_S 値の期待値 $\langle Y_S(T) \rangle$ についてデータ数 N を考慮に入れた理論式が以下のように求められる^[21,22,23]。

$$\langle Y_S(T) \rangle = Y_{\infty,0} f_{Y_S}(\alpha_0 T, N) - \frac{1}{N} \quad (3-130)$$

$$f_{Y_S}(x, y) \equiv 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{1}{y} \left(1 - \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \right) \quad (3-131)$$

上で求められた理論式と、データ数の有限性を無視した従来の Y 値の理論式

$$Y_0(T) = Y_{\infty,0} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \quad (3-77)$$

を比較すると、データ数 N の効果による付加的な項が加わったのが分かる。また当然ながら、データ数 $N \rightarrow \infty$ の極限において、 $\langle Y_S(T) \rangle$ の理論式は従来の Y 値の理論式に一致する。

ここで Y_S 値の期待値 $\langle Y_S(T) \rangle$ について検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ を考えると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle Y_S(T) \rangle = Y_{\infty,0} \left(1 - \frac{1}{N} \right) - \frac{1}{N} \quad (3-132)$$

となり、データ数 N が十分に多くないと $T \rightarrow \infty$ における Y_S 値は真の飽和値 $Y_{\infty,0}$ に比べて過小評価されることが分かる。従って、バンチング処理を用いて Y_S 値を測定した場合、検出時間幅 T が大きくなるにつれデータ数 N が少なくなるために、 Y_S 値は飽和せずに落ち込むことが分かる。

以上より、標本分散を用いて評価された Y_S 値の解析を行う際には、データ数 N が十分に多くなければ、データ数の有限性を考慮に入れた(3-130)式を用いる必要があると考えられる。

3.9.4.4 標本分散、標本三次モーメントを用いた場合の X 値の期待値

標本分散 v_s と標本三次モーメント s_s を用いて評価された X 値を、 Y 値の場合と同様に、 X_s 値と表すことにする。ここで X_s 値は以下のように定義される。

$$X_s(T) \equiv \frac{s_s}{C} - 3 \frac{v_s}{C} + 2 \quad (3-133)$$

上で定義された X_s 値の分母、分子の期待値をそれぞれとることで、 X_s 値の期待値 $\langle X_s(T) \rangle$ を考えることにする。

$$\langle X_s(T) \rangle = \frac{\langle s_s \rangle}{\langle C_i \rangle} - 3 \frac{\langle v_s \rangle}{\langle C_i \rangle} + 2 \quad (3-134)$$

上式に標本分散、標本三次モーメントの期待値 $\langle v_s \rangle$ 、 $\langle s_s \rangle$ を代入し、上で導出された中性子検出数の 2、3 次モーメントの期待値を代入することにより、 X_s 値の期待値 $\langle X_s(T) \rangle$ についてデータ数 N を考慮に入れた理論式が以下のように求められる^[22,23]。

$$\langle X_s(T) \rangle = X_{2\infty,0} f_{X_s,2}(\alpha_0 T, N) + X_{3\infty,0} f_{X_s,3}(\alpha_0 T, N) - \frac{6}{N} Y_{\infty,0} f_{Y_s}(\alpha_0 T, N) + \frac{2}{N^2} \quad (3-135)$$

$$f_{X_s,2}(x, y) \equiv 1 + e^{-x} - 2 \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{1}{y} \left\{ 3 + e^{-x} - 4 \frac{1 - e^{-x}}{x} - 2 \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \left(1 - \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) \right\} + \frac{2}{y^2} \left(1 + e^{-xy} - 2 \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \right) \quad (3-136)$$

$$f_{X_s,3}(x, y) \equiv 1 - \frac{3 - 4e^{-x} + e^{-2x}}{2x} - \frac{1}{y} \left[3 - 3 \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{(1 - e^{-x})(1 - e^{-xy})}{xy} \left\{ 1 + \frac{1 + e^{-xy}}{2(1 + e^{-x})} \right\} \right] + \frac{2}{y^2} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-xy} + e^{-2xy}}{2xy} \right) \quad (3-137)$$

上で求められた理論式と、データ数の有限性を無視した従来の X 値の理論式

$$X_0(T) = X_{2,0}(T) + X_{3,0}(T) \quad (3-79)$$

$$X_{2,0}(T) = X_{2\infty,0} \left(1 + e^{-\alpha_0 T} - 2 \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \quad (3-80)$$

$$X_{3,0}(T) = X_{3\infty,0} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha_0 T} + e^{-2\alpha_0 T}}{2\alpha_0 T} \right) \quad (3-82)$$

を比較すると、データ数 N の効果による付加的な項が加わったのが分かる。特に、 $\langle X_s(T) \rangle$ の理論式において Y 値の関数形が現れることに注目すべきである。また当然ながら、データ数 $N \rightarrow \infty$ の極限において、 $\langle X_s(T) \rangle$ の理論式は従来の X 値の理論式に一致する。

ここで X_s 値の期待値 $\langle X_s(T) \rangle$ について検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ を考えると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle X_s(T) \rangle = (X_{2\infty,0} + X_{3\infty,0}) \left(1 - \frac{1}{N} \right) \left(1 - \frac{2}{N} \right) - Y_{\infty,0} \frac{6}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right) + \frac{2}{N^2} \quad (3-138)$$

となり、データ数 N が十分多くない場合には、 Y_s 値の場合と同様に、 $T \rightarrow \infty$ における X_s 値は N に依存して真の飽和値 $X_{2\infty,0} + X_{3\infty,0}$ から系統的にずれることが分かる。

以上より、 Y_s 値の場合と同様に、標本分散、標本三次モーメントを用いて評価された X_s 値の解析を行う際には、データ数 N が十分に多くなければ、データ数の有限性を考慮に入れた(3-135)式を用いる必要があると考えられる。

3.9.5 不偏分散と不偏三次モーメントを用いた場合の Y 、 X 値の理論式

以上で述べたように標本分散、標本三次モーメントを用いて Y 、 X 値を測定した場合、データ数 N が十分に多くなければ、データ数 N の効果を考慮する必要があるのが分かった。

このデータ数の有限性の効果を軽減するために、ここでは Y 、 X 値の測定に不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U を用いた場合について考える。まず不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U の定義、性質について述べ、それらの期待値 $\langle v_U \rangle$ 、 $\langle s_U \rangle$ を求める。次に不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U を用いて測定された Y 、 X 値の期待値を考えて、中性子検出数のモーメントの期待値を利用することにより、データ数 N を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出する。

3.9.5.1 不偏分散

不偏分散 v_U は中性子検出数の平均 \bar{C} を用いて、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} v_U &\equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})^2 \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N C_i^2 - \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{i=1}^N C_i \right)^2 \end{aligned} \quad (3-139)$$

不偏分散 v_U は標本分散 v_S の分母の N を $N-1$ に変えただけ（あるいは標本分散 v_S に $N/N-1$ をかけただけ）であるが、以下で示すように、データ数 N によって生じるバイアスをなくすることができる。ただし、不偏分散 v_U を評価するためにはデータ数 N が 2 個以上でなければならない。

中性子検出数の分散を評価する際に不偏分散 v_U を用いたとすると、得られた不偏分散 v_U の期待値 $\langle v_U \rangle$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \langle v_U \rangle &= \left\langle \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N C_i^2 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{i=1}^N C_i \right)^2 \right\rangle \\ &= v_{\text{true}} - \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \text{cov}(C_i, C_{i+j}) \end{aligned} \quad (3-140)$$

ただし v_{true} は(3-120)式で表される分散の期待値（真値）である。上式より、不偏分散 v_U を用いて分散を評価した場合、仮に C_i と C_{i+j} の間に相関がなければ（すなわち $\text{cov}(C_i, C_{i+j})=0$ ）、分散の真値 v_{true} を正確に推定できるのが分かる。

実際には C_i と C_{i+j} の間に相関があるが、中性子検出数の二次モーメント $C_i C_{i+j}$ の期待値を導出した際に述べたように、検出時間幅 T が $T \rightarrow \infty$ とみなせるほど十分大きければ、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(C_i, C_{i+j}) = 0 \quad (3-141)$$

となり C_i と C_{i+j} の間に相関がないとみなすことができる。従って $T \rightarrow \infty$ における $\langle v_U \rangle$ は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle v_U \rangle = v_{\text{true}} \quad (3-142)$$

となり、 T が十分大きければ不偏分散 v_U により真値 v_{true} を正確に推定できることが分かる。

3.9.5.2 不偏三次モーメント

不偏三次モーメント s_U は中性子検出数の平均 \bar{C} を用いて以下のように定義される。

$$\begin{aligned} s_U &\equiv \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N (C_i - \bar{C})^3 \\ &= \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N C_i^3 - \frac{3}{(N-1)(N-2)} \left(\sum_{i=1}^N C_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N C_i \right) + \frac{2}{N(N-1)(N-2)} \left(\sum_{i=1}^N C_i \right)^2 \end{aligned} \quad (3-143)$$

不偏三次モーメント s_U は標本三次モーメント s_S に $N^2 / \{(N-1)(N-2)\}$ をかけたただけであるが、以下で示すように、データ数 N によって生じるバイアスをなくすることができる。ただし、不偏三次モーメント s_U を評価するためにはデータ数 N が 3 個以上でなければならない。

中性子検出数の三次モーメントを評価する際に不偏三次モーメント s_U を用いたとすると、得られた不偏三次モーメント s_U の期待値 $\langle s_U \rangle$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \langle s_U \rangle &= \left\langle \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^N C_i^3 \right\rangle - \frac{3}{(N-1)(N-2)} \left\langle \left(\sum_{i=1}^N C_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N C_i \right) \right\rangle \\ &\quad + \frac{2}{N(N-1)(N-2)} \left\langle \left(\sum_{i=1}^N C_i \right)^3 \right\rangle \\ &= s_{\text{true}} - \frac{3}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} (\text{cum}_3(C_i, C_i, C_{i+j}) + \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j})) \\ &\quad + \frac{12}{N(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) \end{aligned} \quad (3-144)$$

ただし s_{true} は(3-124)式で表される三次モーメントの期待値（真値）である。上式より、不偏分散 v_U の場合と同様に、不偏三次モーメント s_U を用いて分散を評価した場合、仮に C_i と C_{i+j} と C_{i+j+k} の間に相関がなければ ($\text{cum}_3(C_i, C_i, C_{i+j}) = 0$ & $\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j}) = 0$ & $\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) = 0$)、三次モーメントの真値 s_{true} を正確に推定できるのが分かる。

実際には C_i と C_{i+j} と C_{i+j+k} の間に相関があるが、中性子検出数の三次モーメントの期待値を導出した際に述べたように、検出時間幅 T が $T \rightarrow \infty$ とみなせるほど十分大きければ、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cum}_3(C_i, C_i, C_{i+j}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(C_i^2, C_{i+j}) - 2 \langle C_i \rangle \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(C_i, C_{i+j}) = 0 \quad (3-145)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(C_i, C_{i+j}^2) - 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(C_i, C_{i+j}) \langle C_{i+j} \rangle = 0 \quad (3-146)$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle - \langle C_i C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle - \langle C_i C_{i+j+k} \rangle \langle C_{i+j} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle \langle C_i \rangle + 2 \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\langle C_i C_{i+j} C_{i+j+k} \rangle - \langle C_i \rangle \langle C_{i+j} \rangle \langle C_{i+j+k} \rangle \right) - \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(C_i, C_{i+j}) \langle C_{i+j+k} \rangle \\ &\quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(C_i, C_{i+j+k}) \langle C_{i+j} \rangle - \lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(C_{i+j}, C_{i+j+k}) \langle C_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3-147)$$

となり C_i と C_{i+j} と C_{i+j+k} の間に相関がないとみなすことができる。従って $T \rightarrow \infty$ における $\langle s_U \rangle$ は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle s_U \rangle = s_{\text{true}} \quad (3-148)$$

となり、 T が十分大きければ不偏三次モーメント s_U により真値 s_{true} を正確に推定できることが分かる。

3.9.5.3 不偏分散を用いた場合の Y 値の期待値

上で述べた不偏分散 v_U を用いて評価された Y 値を Y_U 値と表すことにすると、 Y_U 値は以下のよう
に定義される。

$$Y_U(T) \equiv \frac{v_U}{C} - 1 \quad (3-149)$$

上で定義された Y_U 値の分母、分子の期待値をそれぞれとることで、 Y_U 値の期待値 $\langle Y_U(T) \rangle$ を考
えることにする。

$$\langle Y_U(T) \rangle = \frac{\langle v_U \rangle}{\langle C_i \rangle} - 1 \quad (3-150)$$

上式に不偏分散の期待値 $\langle v_U \rangle$ を代入し、中性子検出数の 2 次モーメントの期待値を代入すること
で、 Y_U 値の期待値 $\langle Y_U(T) \rangle$ についてデータ数 N を考慮に入れた理論式が以下のように求められる^[23]。

$$\langle Y_U(T) \rangle = Y_{\infty,0} f_{Y_U}(\alpha_0 T, N) \quad (3-151)$$

$$f_{Y_U}(x, y) \equiv \frac{y}{y-1} \left(1 - \frac{1-e^{-x}}{x} \right) - \frac{1}{y-1} \left(1 - \frac{1-e^{-xy}}{xy} \right) \quad (3-152)$$

上式と、標本分散を用いた $\langle Y_S(T) \rangle$ の理論式(3-130)式とを比較すると、データ数 N の効果による付
加的な項が少なくなり、データ数の有限性を無視した従来の Y 値の理論式の形により近くなった
のが分かる。また当然ながら、データ数 $N \rightarrow \infty$ の極限において、 $\langle Y_U(T) \rangle$ の理論式は従来の Y 値の
理論式に一致する。

ここで Y_U 値の期待値 $\langle Y_U(T) \rangle$ について検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ を考えると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle Y_U(T) \rangle = Y_{\infty,0} \quad (3-153)$$

となり、 $T \rightarrow \infty$ における Y_U 値はデータ数 N に依存することなく真の飽和値 $Y_{\infty,0}$ に収束することが
分かる。これは、 T が十分大きければデータ間の相関が無視できるようになるため、不偏分散 v_U
により真値 v_{true} を正確に推定できることに起因する。従って、バンチング処理を用いて Y_U 値を測
定した場合、検出時間幅 T が大きくなるにつれデータ数 N は少なくなるが、そのデータ数 N の減
少による効果を受けることなく Y_U 値は真値に飽和することが上式より期待される。

以上より、 Y 値の飽和値を正しく推定するためには、不偏分散により評価された Y_U 値を用いる
べきだと考えられる。

3.9.5.4 不偏分散、不偏三次モーメントを用いた場合の X 値の期待値

不偏分散 v_U と不偏三次モーメント s_U を用いて評価された X 値を、 Y 値の場合と同様に、 X_U 値
と表すことにする。ここで X_U 値は以下のように定義される。

$$X_U(T) \equiv \frac{s_U}{C} - 3 \frac{v_U}{C} + 2 \quad (3-154)$$

上で定義された X_U 値の分母、分子の期待値をそれぞれとることで、 X_U 値の期待値 $\langle X_U(T) \rangle$ を考
えることにする。

$$\langle X_U(T) \rangle = \frac{\langle s_U \rangle}{\langle C_i \rangle} - 3 \frac{\langle v_U \rangle}{\langle C_i \rangle} + 2 \quad (3-155)$$

上式に不偏分散、不偏三次モーメントの期待値 $\langle v_U \rangle$ 、 $\langle s_U \rangle$ を代入し、中性子検出数の 2、3 次モー

メントの期待値を代入することにより、 X_U 値の期待値 $\langle X_U(T) \rangle$ についてデータ数 N を考慮に入れた理論式が以下のように求められる^[23]。

$$\langle X_U(T) \rangle = X_{2\infty,0} f_{X_U,2}(\alpha_0 T, N) + X_{3\infty,0} f_{X_U,3}(\alpha_0 T, N) \quad (3-156)$$

$$f_{X_U,2}(x, y) \equiv \frac{y^2}{(y-1)(y-2)} \left(1 + e^{-x} - 2 \frac{1-e^{-x}}{x} \right) - \frac{y}{(y-1)(y-2)} \left\{ 3 + e^{-x} - 4 \frac{1-e^{-x}}{x} - 2 \frac{1-e^{-xy}}{xy} \left(1 - \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} \right) \right\} + \frac{2}{(y-1)(y-2)} \left(1 + e^{-xy} - 2 \frac{1-e^{-xy}}{xy} \right) \quad (3-157)$$

$$f_{X_U,3}(x, y) \equiv \frac{y^2}{(y-1)(y-2)} \left(1 - \frac{3-4e^{-x}+e^{-2x}}{2x} \right) - \frac{y}{(y-1)(y-2)} \left[3 - 3 \frac{1-e^{-x}}{x} - \frac{(1-e^{-x})(1-e^{-xy})}{xy} \left\{ 1 + \frac{1+e^{-xy}}{2(1+e^{-x})} \right\} \right] + \frac{2}{(y-1)(y-2)} \left(1 - \frac{3-4e^{-xy}+e^{-2xy}}{2xy} \right) \quad (3-158)$$

上式と、標本分散、標本三次モーメントを用いた $\langle X_S(T) \rangle$ の理論式(3-135)式とを比較すると、データ数 N の効果による付加的な項が少なくなり、データ数の有限性を無視した従来の X 値の理論式の形により近くなったのが分かる。特に $\langle X_S(T) \rangle$ の理論式において現れた Y 値の関数形が、 $\langle X_U(T) \rangle$ の理論式には現れないことに注目すべきである。また当然ながら、データ数 $N \rightarrow \infty$ の極限において、 $\langle X_U(T) \rangle$ の理論式は従来の X 値の理論式に一致する。

ここで X_U 値の期待値 $\langle X_U(T) \rangle$ について検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ を考えると

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle X_U(T) \rangle = X_{2\infty,0} + X_{3\infty,0} \quad (3-159)$$

となり、 $T \rightarrow \infty$ における X_U 値はデータ数 N に依存することなく真の飽和値 $X_{2\infty,0} + X_{3\infty,0}$ に収束することが分かる。これは、 T が十分大きければデータ間の相関が無視できるようになるため、不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U により真値 v_{true} 、 s_{true} を正確に推定できることに起因する。従って Y_U 値の場合と同様に、バンチング処理を用いて X_U 値を測定した場合、検出時間幅 T が大きくなるにつれデータ数 N は少なくなるが、そのデータ数 N の減少による効果を受けることなく X_U 値は真値に飽和することが上式より期待される。

以上より、 X 値の飽和値を正しく推定するためには、 Y_U 値の場合と同様に、不偏分散により評価された X_U 値を用いるべきだと考えられる。

3.9.6 分散、三次モーメントの最良評価法

上で述べたように、不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U を用いて Y 、 X 値を評価することで、データ数の有限性の効果をかなり軽減することができた。しかし不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U を用いたとしても、データ間の相関による効果まで除くことはできない。そこで参考のために、データ間の相関による効果まで完全に排除した、分散 v 、不偏三次モーメント s の最良評価法について示しておく。

データ間の相関による効果まで完全に排除した、分散 v 、不偏三次モーメント s の最良評価法は形式的に以下のように表される。

$$v_{\text{best}} = v_U + \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} \text{cov}(C_i, C_{i+j}) \quad (3-160)$$

$$s_{\text{best}} = s_U + \frac{3}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-i} (\text{cum}_3(C_i, C_i, C_{i+j}) + \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j})) \\ - \frac{12}{N(N-1)(N-2)} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-1-i} \sum_{k=1}^{N-i-j} \text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k}) \quad (3-161)$$

ただし v_{best} 、 s_{best} は分散、三次モーメントの最良推定値を表し、それらの期待値は真値 v_{true} 、 s_{true} になる。

v_{best} 、 s_{best} を評価するためには、不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U からデータ間の相関の効果（すなわち $\text{cov}(C_i, C_i)$ 、 $\text{cum}_3(C_i, C_i, C_{i+j})$ 、 $\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j})$ 、 $\text{cum}_3(C_i, C_{i+j}, C_{i+j+k})$ ）を補正しなければならない。しかし現実問題として、有限個のデータからデータ間の相関を推定するのは困難であると考えられる。また、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値を考える場合には、不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U を用いることで正しく評価できることが分かった。従って、本研究では分散、三次モーメントの評価法としては、不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U で十分であり、これ以上の議論は必要ないと考えた。

3.10 本章のまとめ

本章で得られた結果、結論を以下に示す。

- 1) 固有関数展開を利用することにより、空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた、二次相関量 Y 値および三次相関量 X 値の理論式を新たに導出した。
- 2) Y 、 X 値の 1 点炉近似式と基本モード近似式は、関数形としては同じ形で表されるが、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値を考えた場合には全く異なることが分かった。
- 3) Y 、 X 値の基本モード近似式を利用することで、基本モード固有関数による空間・中性子エネルギー・方向の効果を検討に入れた、三次中性子相関法の解析公式を新たに導出した。
- 4) Y 、 X 値を評価する際に標本分散、標本三次モーメントを用いた場合について、データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出した。この場合には、データ数の有限性の効果が大きく、この効果を考慮に入れて Y 、 X 値を解析する必要があることが分かった。
- 5) Y 、 X 値を評価する際に不偏分散、不偏三次モーメントを用いた場合について、データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出した。この場合には、データ数 N に依存することなく、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値が正しく推定できることが分かった。

Chapter 4

中性子検出確率のバランス方程式に基づいた Y 、 X 値の一般理論

4.1 本章の目的・概要

前章では、物理的直感法に基づいて空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出した。本章では、物理的直感法とは別の手法に基づいて、すなわち検出確率のバランス方程式に基づいて、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論について述べる。

まず、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた中性子検出確率のバランス方程式を導出する^[16,24]。次に、導出された中性子検出確率のバランス方程式を確率母関数の方程式に変換する。こうして得られた確率母関数の方程式を利用することで、直ちに中性子検出数の階乗モーメントが従う随伴輸送方程式を導出することができる。最後に、導出された中性子検出数の階乗モーメントが従う随伴輸送方程式を利用することで、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論を導出することができる。

導出された Y 、 X 値の一般理論より、決定論的手法により Y 、 X 値の数値計算が可能であることが示される。また Y 、 X 値の一般理論を用いて、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の理論式を固有関数展開により導出し、その結果が前章で物理的直感法により得られた結果と完全に一致することを示す。さらに固有関数展開を用いて得られた Y_∞ 、 X_∞ の理論式の見方を変えることで、 Y_∞ 、 X_∞ の理論式が定常状態における角度中性子束および検出反応に対するインポートランスにより表されることを示す。

4.2 理論式導出条件

以下で導出する理論式の条件を示す。

- ・ 実効増倍率 k_{eff} 、未臨界度 ($-\rho$) の未臨界体系。体系の全領域を V 、領域表面を S とする。領域表面 S の外向き法線ベクトルを \mathbf{n} とし、真空境界条件を満足する
- ・ 空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮。
- ・ 核分裂で発生する中性子として遅発中性子も考慮する。ただし遅発中性子先行核の群数は 6 群とする。
- ・ 体系内に外部中性子源が強度空間分布 $S(\mathbf{r})$ で存在。
- ・ 巨視的検出反応断面積 $\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ の中性子検出器が体系内に 1 個存在する。ただし中性子検出は捕獲反応を利用するものとする。

4.3 確率母関数

ここでは、以下で理論式を導出する際に重要な役割を果たす、確率母関数について説明する。

中性子検出数の平均や分散、モーメントといった統計量を求めるためには、 C 個の中性子が検出される確率 $P(C)$ を全ての C について求める必要がある。この $P(C)$ を求めることができれば、

$$\langle C \rangle = \sum_{C=0}^{\infty} CP(C) \quad (\text{平均}) \quad (4-1)$$

$$\langle (C - \langle C \rangle)^2 \rangle = \sum_{C=0}^{\infty} (C - \langle C \rangle)^2 P(C) \quad (\text{分散}) \quad (4-2)$$

$$\langle C(C-1) \rangle = \sum_{C=0}^{\infty} C(C-1)P(C) \quad (2 \text{ 次階乗モーメント}) \quad (4-3)$$

といった統計量の期待値を得ることができる。

ここで、確率 $P(C)$ に対して確率母関数 $G(Z)$ を以下のように定義する。

$$G(Z) \equiv \sum_{C=0}^{\infty} Z^C P(C) \quad (4-4)$$

上式で定義された確率母関数 $G(Z)$ の性質を以下で述べる。

まず、 $G(Z)$ に $Z=1$ を代入することで

$$G(1) = \sum_{C=0}^{\infty} P(C) = 1 \quad (\text{確率の総和は } 1) \quad (4-5)$$

となるのが分かる。

また、 $G(Z)$ を Z について n 回偏微分し $Z=1$ を代入することにより、 C の n 次の階乗モーメントの期待値を以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^n G}{\partial Z^n} \right|_{Z=1} &\equiv \sum_{C=0}^{\infty} C(C-1)\cdots(C-n+1)Z^{C-n}P(C) \Big|_{Z=1} \\ &= \sum_{C=0}^{\infty} C(C-1)\cdots(C-n+1)P(C) \\ &= \langle C(C-1)\cdots(C-n+1) \rangle \end{aligned} \quad (4-6)$$

上式より、確率母関数 $G(Z)$ さえ分かれば、直ちに C の階乗モーメントの期待値を得ることができるのが分かる。

最後に、確率母関数 $G(Z)$ を用いる重要な性質として、確率 $P_1(C)$ 、 $P_2(C)$ の畳み込み $P_1 * P_2$ の確率母関数が、それら $P_1(C)$ 、 $P_2(C)$ の確率母関数 $G_1(Z)$ 、 $G_2(Z)$ の積で表すことができる点が挙げられる。ここで確率 $P_1(C)$ 、 $P_2(C)$ の畳み込み $P_1 * P_2$ は以下のように定義される。

$$P_1 * P_2 = \sum_{c_1=C} P_1(c_1)P_2(c_2) = \sum_{c=0}^C P_1(C-c)P_2(c) \quad (4-7)$$

ただし上式において、

$$\sum_{\sum_{c_i=C}} : \sum_i c_i = C \text{ を満足する全ての場合について和を取る}$$

ことを意味する。上式で定義される畳み込み $P_1 * P_2$ の確率母関数を考えることで、

$$\begin{aligned} \sum_{C=0}^{\infty} Z^C (P_1 * P_2) &= \sum_{C=0}^{\infty} Z^C \sum_{c=0}^C P_1(C-c) P_2(c) \\ &= \left(\sum_{c_1=0}^{\infty} Z^{c_1} P_1(c_1) \right) \left(\sum_{c_2=0}^{\infty} Z^{c_2} P_2(c_2) \right) = G_1(Z) G_2(Z) \end{aligned} \quad (4-8)$$

となり、 $P_1(C)$ 、 $P_2(C)$ の確率母関数 $G_1(Z)$ 、 $G_2(Z)$ の積で表されることが分かる。

以下において、「1個の中性子が体系に投入された後、 C 個の中性子が検出される確率 $P_G(C)$ 」、あるいは「外部中性子源が体系に投入された後、 C 個の中性子が検出される確率 $P(C)$ 」に対する検出確率のバランス方程式を導出する^[16,24]。それらの検出確率のバランス方程式の中には、核分裂もしくは外部中性子源の崩壊により確率の畳み込みで表現される項が現れるため、上で述べた確率母関数を用いて、検出確率のバランス方程式を確率母関数方程式に変換する。これにより「確率の畳み込み」という複雑な項を、単純な確率母関数の積の形に変換することができる。さらに得られた確率母関数方程式に対して、(4-6)式の性質を用いることで、直ちに中性子検出数階乗モーメント方程式を導くことができる。

4.4 1個の中性子が体系に投入された場合の中性子検出確率

外部中性子源が投入されてから十分な時間が経過して定常状態に達した未臨界体系を想定し、この体系で検出時間幅 T の間だけ中性子を検出したとする。ここで検出時間幅 T の間に検出された中性子数の平均や分散、モーメントを求めるためには、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率、すなわち「外部中性子源が体系に投入された後、 C 個の中性子が検出される確率 $P(C)$ 」を求める必要がある。

線源で発生した中性子が検出されるまでの過程を詳細に考えると、

- ① 外部中性子源からは、時間的に一様な確率で中性子が放出され続ける
- ② さらに外部中性子源が崩壊する際、複数個の中性子が放出され、連鎖反応系が分岐する
- ③ 核分裂反応が起こった場合も複数個の即発中性子、あるいは遅発中性子先行核が放出され、連鎖反応系が分岐する

といった過程を経て中性子が検出される。これらの過程を同時に全て考えるのは困難なので、まずはこれらの過程の基礎となる、「1個の中性子が体系に投入された後、 C 個の中性子が検出される確率 $P_G(C)$ 」という一種のグリーン関数的な確率 $P_G(C)$ を求めることにする。

ここでは、「1個の中性子が体系に投入された場合の検出確率 $P_G(C)$ 」のバランス方程式をまず導出する。次に、導出された検出確率 $P_G(C)$ のバランス方程式を確率母関数 $G_G(Z)$ の方程式に変換する。こうして得られた確率母関数 $G_G(Z)$ の方程式より、1個の中性子が体系に投入された場合の中性子検出数階乗モーメントが従う随伴輸送方程式を導出することができる。

ただし以下の導出では、Fig. 4-1 で示したように、時刻 t に1個の中性子が体系に投入され、時刻 t_{open} から時刻 t_{close} の時間幅 T ($T = t_{\text{close}} - t_{\text{open}}$) の間に中性子が検出されることを想定する。

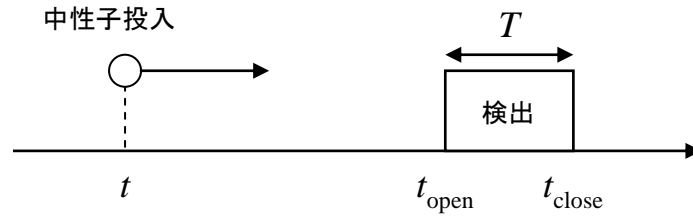


Fig. 4-1 1個の中性子が投入される場合の中性子検出

4.4.1 中性子検出確率のバランス方程式

4.4.1.1 1個の中性子が体系に投入された場合の中性子検出確率のバランス方程式

時刻 t において、位置 \mathbf{r} に、エネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ の 1 個の中性子が体系に投入された時、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率を $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ とする。

この検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ は以下のような終期条件および境界条件を満足する。

$$P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t') = \delta_{C0} \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-9)$$

: 検出時間終了後に投入された中性子は検出されない

$$P_G(C, T | \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}', t) = \delta_{C0} \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\boldsymbol{\Omega}' > 0) \quad (4-10)$$

: 領域表面で体系外（真空）に向けて投入された中性子は検出されない

時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と衝突するかどうか、さらに衝突した場合にはどのような核反応を起こすかを考えることで、時刻 t における検出確率

$P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ と時刻 $t + \Delta t$ における検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t)$ の間のバランス方程式を導出することができる。

1) 中性子が原子核と衝突しない場合

時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と衝突しない場合について考える。中性子が微小時間 Δt 後に原子核と衝突する確率は、中性子速度 $v(E)$ と巨視的全断面積 $\Sigma_t(\mathbf{r}, E)$ を用いて $v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\Delta t$ で表される。逆に言えば、中性子が微小時間 Δt 後に原子核と衝突せずに飛行し続ける確率は $(1 - v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\Delta t)$ で表される。この場合、中性子のエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ は変化せず、飛行後の位置 $\mathbf{r} + v(E)\boldsymbol{\Omega}\Delta t$ に 1 個の中性子が投入されたとみなせる。すなわち、衝突しなかった中性子によって検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は $P_G(C, T | \mathbf{r} + v(E)\boldsymbol{\Omega}\Delta t, E, \boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t)$ と表される。

従って、時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と衝突せずに、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$(1 - v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\Delta t)P_G(C, T | \mathbf{r} + v(E)\boldsymbol{\Omega}\Delta t, E, \boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t) \quad (4-11)$$

2) 中性子が原子核と散乱反応を起こす場合

時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と散乱反応を起こす場合について考える。中性子が微小時間 Δt 後に原子核と散乱反応を起こす確率は、中性子速度 $v(E)$ と巨視的散乱断面積 $\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}')$ を用いて $v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}')\Delta t$ で表される。この散乱反応により、エネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ の中性子がエネルギー E' 、方向 $\boldsymbol{\Omega}'$ に変化して体系内に新たに投入される。すなわち、散乱された中性子によって検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は $P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t + \Delta t)$ と表される。

散乱後の全エネルギー E' 、全方向 $\boldsymbol{\Omega}'$ で積分することにより、時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と散乱反応を起こして、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}')\Delta t P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t + \Delta t) \quad (4-12)$$

3) 中性子が核分裂反応を起こす場合

時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と核分裂反応を起こす場合について考える。中性子が微小時間 Δt 後に原子核と核分裂反応を起こす確率は、中性子速度 $v(E)$ と巨視的核分裂断面積 $\Sigma_f(\mathbf{r}, E)$ を用いて $v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E)\Delta t$ で表される。次に、エネルギー E の中性子が核分裂反応を起こすことで、 ν_p 個の即発中性子と、 $\nu_{d,i}$ 個の i 群の遅発中性子先行核 ($i=1, 2, \dots, 6$) がそれぞれ放出される確率を $p_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E)$ と表すことにする。1 個の遅発中性子先行核が崩壊することで 1 個の遅発中性子が発生するならば、結局 1 回の核分裂反応当りに合計で、

$$\nu = \nu_p + \sum_{i=1}^6 \nu_{d,i} \quad (4-13)$$

の中性子が発生することになる。最終的に検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出されなければならないので、発生した ν 個の中性子で合わせて C 個の中性子が検出されるように確率が畳み込まれる (合わせて C 個の中性子が検出されるように、全ての場合について和をとる)。核分裂反応により **a)** 即発中性子が発生した場合、あるいは **b)** i 群の遅発中性子先行核が発生した場合において、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

a) 核分裂反応により即発中性子が発生した場合

核分裂反応により即発中性子が発生した場合、中性子は即発中性子スペクトル $\chi_{fp}(E')$ に従って体系に等方的に放出される。核分裂で発生する中性子について全エネルギー E' 、全方向 $\boldsymbol{\Omega}'$ で積分することにより、時刻 $t + \Delta t$ において即発中性子が 1 個発生することで検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように得られる。

$$\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{fp}(E')}{4\pi} P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t + \Delta t) \quad (4-14)$$

b) i 群の遅発中性子先行核が発生した場合

i 群の遅発中性子先行核が発生した場合については、新たに、「時刻 t において、位置 \mathbf{r} に 1 個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された時に、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出さ

れる確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ 」を導入する。これを利用することより、時刻 $t + \Delta t$ において i 群の遅発中性子先行核が 1 個体系内に投入されることで検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t + \Delta t)$ で表される。

以上で述べた即発・遅発中性子による検出確率(4-14)式、 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t + \Delta t)$ を畳み込むことで、時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と核分裂反応を起こして、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \Delta t \sum_{\nu_p=0}^{\infty} \sum_{\nu_{d,1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^{\infty} P_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\ & \times \sum_{\sum c_{ij}=C} \left\{ \delta_{\nu_p,0} \delta_{c_{0,0}} + (1 - \delta_{\nu_p,0}) \left(\prod_{j=1}^{\nu_p} \int_0^{\infty} dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{i,p}(E')}{4\pi} P_G(c_{0,j}, T | \mathbf{r}, E', \Omega', t + \Delta t) \right) \right\} \\ & \times \left[\prod_{i=1}^6 \left\{ \delta_{\nu_{d,i},0} \delta_{c_{i,0}} + (1 - \delta_{\nu_{d,i},0}) \left(\prod_{j=1}^{\nu_{d,i}} P_{d,i}(c_{ij}, T | \mathbf{r}, t + \Delta t) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (4-15)$$

ただし上式において、

c_{ij} : 即発中性子 ($i=0$) または i 群の遅発中性子先行核が j 個発生した際に、 j 番目の中性子が体系に投入されることで検出される中性子数

$\sum_{\sum c_{ij}=C} : \sum_i \sum_j c_{ij} = C$ を満足する全ての場合について和をとる

$\delta_{\nu_p,0} \delta_{c_{0,0}}$: 即発中性子が発生しない場合、中性子は検出されない

$\delta_{\nu_{d,i},0} \delta_{c_{i,0}}$: i 群の遅発中性子先行核が発生しない場合、中性子は検出されない

ことをそれぞれ意味する。

c) 中性子が捕獲反応を起こす場合

時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と捕獲反応を起こす場合について考える。中性子が微小時間 Δt 後に原子核と捕獲反応を起こす確率は、中性子速度 $\mathbf{v}(E)$ と巨視的捕獲断面積 $\Sigma_c(\mathbf{r}, E)$ を用いて $\mathbf{v}(E) \Sigma_c(\mathbf{r}, E) \Delta t$ で表される。中性子は捕獲されてなくなるので、検出時間幅 T の間に中性子が検出されることはない (すなわち δ_{c_0})。

従って、時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に原子核と捕獲反応を起こして、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$\mathbf{v}(E) \Sigma_c(\mathbf{r}, E) \Delta t \delta_{c_0} \quad (4-16)$$

d) 中性子が検出反応を起こす場合

時刻 t において投入された 1 個の中性子が微小時間 Δt 後に検出される場合について考える。中性子が微小時間 Δt 後に検出反応を起こす確率は、中性子速度 $\mathbf{v}(E)$ と巨視的検出反応断面積 $\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ を用いて $\mathbf{v}(E) \Sigma_d(\mathbf{r}, E) \Delta t$ で表される。ただし検出反応が起きたとしても、検出時間幅 T 内で検出反応が起きなければ中性子は検出されない。すなわち、時刻 t において投入された 1 個の中性子が微小時間 Δt 後に検出時間幅 T 内にあれば、1 個の中性子が検出される (すなわち δ_{c_1})。逆に検出時間幅 T 外であれば、中性子は検出されない (すなわち δ_{c_0})。

従って、時刻 t において投入された 1 個の中性子が、微小時間 Δt 後に検出反応を起こして、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)\Delta t \{ \xi(t, T)\delta_{C1} + (1 - \xi(t, T))\delta_{C0} \} \quad (4-17)$$

ただし上式において、 $\xi(t, T)$ は時刻 t が検出時間幅 T 内であることを表す関数で以下のように定義される。

$$\xi(t, T) = \begin{cases} 1 & \text{if } (t_{\text{open}} \leq t < t_{\text{close}}) \\ 0 & \text{if } (t < t_{\text{open}} \text{ or } t \geq t_{\text{close}}) \end{cases} \quad (4-18)$$

時刻 t に 1 個の中性子が投入されたときの検出確率 $P(C, T | \mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t)$ と、上の **1**~**5**) で述べた微小時間 Δt 後の検出確率の総和が同じでなければならない。従って、検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t)$ 、 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t + \Delta t)$ 、 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t + \Delta t)$ の間の確率バランス方程式が以下のように導出される。

$$\begin{aligned} & P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) \\ &= (1 - v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)\Delta t)P_G(C, T | \mathbf{r} + v(E)\mathbf{\Omega}\Delta t, E, \mathbf{\Omega}, t + \Delta t) \\ &+ \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{\Omega}')\Delta t P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}', t + \Delta t) \\ &+ v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E)\Delta t \sum_{v_p=0}^\infty \sum_{v_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{v_{d,6}=0}^\infty p_f(v_p, v_{d,1}, \dots, v_{d,6}, E) \\ &\times \sum_{\sum c_{ij}=C} \left\{ \delta_{v_p,0} \delta_{c_{00},0} + (1 - \delta_{v_p,0}) \left(\prod_{j=1}^{v_p} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \frac{\chi_{i,p}(E')}{4\pi} P_G(c_{0j}, T | \mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}', t + \Delta t) \right) \right\} \\ &\times \left[\prod_{i=1}^6 \left\{ \delta_{v_{d,i},0} \delta_{c_{i0},0} + (1 - \delta_{v_{d,i},0}) \left(\prod_{j=1}^{v_{d,i}} P_{d,i}(c_{ij}, T | \mathbf{r}, t + \Delta t) \right) \right\} \right] \\ &+ v(E)\Sigma_c(\mathbf{r}, E)\Delta t \delta_{C0} \\ &+ v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)\Delta t \{ \xi(t, T)\delta_{C1} + (1 - \xi(t, T))\delta_{C0} \} \end{aligned} \quad (4-19)$$

上式において $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ることで、1 個の中性子が体系に投入された場合の中性子検出確率のバランス方程式について、以下のような偏微分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v(E)\mathbf{\Omega}\nabla \right) P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) \\ &= -v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \mathbf{\Omega}, t) \\ &+ \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{\Omega}')P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}', t) \\ &+ v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{v_p=0}^\infty \sum_{v_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{v_{d,6}=0}^\infty p_f(v_p, v_{d,1}, \dots, v_{d,6}, E) \\ &\times \sum_{\sum c_{ij}=C} \left\{ \delta_{v_p,0} \delta_{c_{00},0} + (1 - \delta_{v_p,0}) \left(\prod_{j=1}^{v_p} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\mathbf{\Omega}' \frac{\chi_{i,p}(E')}{4\pi} P_G(c_{0j}, T | \mathbf{r}, E', \mathbf{\Omega}', t) \right) \right\} \\ &\times \prod_{i=1}^6 \left\{ \delta_{v_{d,i},0} \delta_{c_{i0},0} + (1 - \delta_{v_{d,i},0}) \left(\prod_{j=1}^{v_{d,i}} P_{d,i}(c_{ij}, T | \mathbf{r}, t) \right) \right\} \\ &+ (v(E)\Sigma_c(\mathbf{r}, E) + v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E))\delta_{C0} \\ &+ v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)\xi(t, T)(\delta_{C1} - \delta_{C0}) \end{aligned} \quad (4-20)$$

4.4.1.2 1 個の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の中性子検出確率のバランス方程式

上式で導出した検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ のバランス方程式を考える際に、「時刻 t において、位置 \mathbf{r} に 1 個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された時に、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ 」を新たに導入した。ここでは、この検出確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ のバランス方程式を以下のように導出する。

この検出確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ は以下のような終期条件を満足する。

$$P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t) = \delta_{C0} \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-21)$$

： (検出時間終了後に投入された中性子は検出されない)

時刻 t において投入された 1 個の i 群の遅発中性子先行核が、微小時間 Δt 後に崩壊するかどうかを考えることで、時刻 t における検出確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ と時刻 $t + \Delta t$ における検出確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t + \Delta t)$ の間のバランス方程式を以下のように導出することができる。

1) i 群の遅発中性子先行核が崩壊しない場合

時刻 t において投入された 1 個の i 群の遅発中性子先行核が、微小時間 Δt 後に崩壊しない場合について考える。 i 群の遅発中性子先行核が微小時間 Δt 後に崩壊する確率は、 i 群の遅発中性子先行核の崩壊定数 λ_i を用いて $\lambda_i \Delta t$ で表される。逆に言えば、 i 群の遅発中性子先行核が微小時間 Δt 後に崩壊しない確率は $(1 - \lambda_i \Delta t)$ となる。この場合、先行核が崩壊しないので、新たに 1 個の先行核が投入されたとみなせる。すなわち、崩壊しなかった i 群の遅発中性子先行核によって検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t + \Delta t)$ と表される。

従って、時刻 t において投入された 1 個の i 群の遅発中性子先行核が、微小時間 Δt 後に崩壊せずに、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$(1 - \lambda_i \Delta t) P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t + \Delta t) \quad (4-22)$$

2) i 群の遅発中性子先行核が崩壊する場合

時刻 t において投入された 1 個の i 群の遅発中性子先行核が、微小時間 Δt 後に崩壊する場合を考える。 i 群の遅発中性子先行核が微小時間 Δt 後に崩壊する確率は、上で述べたように $\lambda_i \Delta t$ で表される。この場合、先行核が崩壊することで、新たに 1 個の中性子が i 群の遅発中性子スペクトル $\chi_{d,i}(E')$ に従って体系に等方的に放出される。先行核の崩壊で発生する中性子について全エネルギー E' 、全方向 $\boldsymbol{\Omega}'$ で積分することにより、時刻 $t + \Delta t$ において遅発中性子が 1 個発生することで検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように得られる。

$$\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t + \Delta t) \quad (4-23)$$

従って、時刻 t において投入された 1 個の i 群の遅発中性子先行核が、微小時間 Δt 後に崩壊することで、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$\lambda_i \Delta t \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t + \Delta t) \quad (4-24)$$

時刻 t に 1 個の i 群の遅発中性子先行核が投入されたときの確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ と、上の **1)**、**2)** で述べた微小時間 Δt 後の検出確率の総和が同じでなければならないので、検出確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ 、 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t + \Delta t)$ 、 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t)$ の間の確率バランス方程式が以下のように導出される。

$$\begin{aligned} & P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t) \\ &= (1 - \lambda_i \Delta t) P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t + \Delta t) + \lambda_i \Delta t \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t + \Delta t) \end{aligned} \quad (4-25)$$

上式において $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ることで、1 個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の中性子検出確率のバランス方程式について、以下のような偏微分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t) \\ &= \lambda_i P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t) - \lambda_i \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} P_G(C, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \end{aligned} \quad (4-26)$$

4.4.2 検出確率の確率母関数の偏微分方程式

1 個の中性子もしくは i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 、 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ の確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 、 $G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t)$ を、それぞれ以下のように定義する。

$$G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \equiv \sum_{C=0}^{\infty} Z^C P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (4-27)$$

$$G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}) \equiv \sum_{C=0}^{\infty} Z^C P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t) \quad (4-28)$$

上で求められた検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 、 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式を利用することにより、確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 、 $G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式を求めることができる。

4.4.2.1 1 個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数方程式

上で求められた、1 個の中性子が体系に投入された場合の検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の偏微分方程式(4-20)式を利用することにより、その確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の偏微分方程式を以下のように導出することができる。

まず、この確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の終期条件および境界条件は以下のようになる。

$$G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t') = 1 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-29)$$

$$G_G(Z, T | \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}', t) = 1 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n \cdot \boldsymbol{\Omega}' > 0) \quad (4-30)$$

検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の偏微分方程式(4-20)式の両辺に Z^C をかけて、全て C について和をとることで、1 個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の偏微分方程式を以下のように導出することができる。

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(E)\boldsymbol{\Omega}\nabla\right)G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \\
 & = -v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \\
 & \quad + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}')G_G(Z, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \\
 & \quad + v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu_p=0}^\infty \sum_{\nu_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^\infty p_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\
 & \quad \times \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} G_G(Z, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \right)^{\nu_p} \left\{ \prod_{i=1}^6 (G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t))^{\nu_{d,i}} \right\} \\
 & \quad + v(E)\Sigma_c(\mathbf{r}, E) + v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E) \\
 & \quad + v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)\xi(t, T)(Z-1)
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

ただし上式を導出する際に、確率 P_G 、 $P_{d,i}$ の畳み込みが確率母関数 G_G 、 $G_{d,i}$ の積となることを利用した。上式において、 $Z=1$ を代入すると

$$0 = -\Sigma_t(\mathbf{r}, E) + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') + \Sigma_f(\mathbf{r}, E) + \Sigma_c(\mathbf{r}, E) + \Sigma_d(\mathbf{r}, E) \tag{4-32}$$

となり、巨視的全断面積は各巨視的反応断面積の総和に等しいという当たり前の結果が得られる。

4.4.2.2 1 個の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の確率母関数の偏微分方程式

上で導出された、1 個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の検出確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式(4-26)式を利用することにより、その確率母関数 $G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式を以下のように導出することができる。

まず、確率母関数 $G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t)$ の終期条件は以下ようになる。

$$G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t) = 1 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \tag{4-33}$$

検出確率 $P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式(4-26)式の両辺に Z^C をかけて、全て C について和をとることで、1 個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の確率母関数 $G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式を以下のように導出することができる。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t) \\
 & = \lambda_i G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t) - \lambda_i \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} G_G(Z, T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t)
 \end{aligned} \tag{4-34}$$

上式において $Z=1$ を代入すると

$$0 = \lambda_i - \lambda_i \tag{4-35}$$

という当たり前の結果が得られる。

4.4.3 中性子検出数の階乗モーメントの期待値が従う随伴輸送方程式

1 個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ を、 Z で n 回偏微分して $Z=1$ とすることで、時刻 t において位置 \mathbf{r} にエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ で 1 個の中性子が投入された場合における中性子検出数の n 次の階乗モーメントの期待値を得ることができる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^n G_G}{\partial Z^n} \right|_{Z=1} &= \sum_{C=0}^{\infty} C(C-1)\cdots(C-n+1)P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \\ &= \langle C_G(C_G - 1)\cdots(C_G - n + 1)(T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \end{aligned} \quad (4-36)$$

同様に、1個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の確率母関数 $G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t)$ を、 Z で n 回偏微分して $Z=1$ とすることで、時刻 t において位置 \mathbf{r} に1個の i 群の遅発中性子先行核が投入された場合における中性子検出数の n 次の階乗モーメントの期待値を得ることができる。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^n G_{d,i}}{\partial Z^n} \right|_{Z=1} &= \sum_{C=0}^{\infty} C(C-1)\cdots(C-n+1)P_{d,i}(C, T | \mathbf{r}, t) \\ &= \langle C_{d,i}(C_{d,i} - 1)\cdots(C_{d,i} - n + 1)(T | \mathbf{r}, t) \rangle \end{aligned} \quad (4-37)$$

以下で具体的に示すように、上で導出された確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ 、 $G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式(4-31)、(4-34)式を Z について n 回偏微分し $Z=1$ を代入することで、直ちにそれらの中性子検出数の n 次階乗モーメントが従う随伴輸送方程式を導出することができる。

4.4.3.1 中性子検出数の期待値（平均）が従う随伴輸送方程式

1個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の偏微分方程式(4-31)式を Z について1回偏微分し $Z=1$ を代入することで、時刻 t において位置 \mathbf{r} にエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ で1個の中性子が投入された場合における中性子検出数の期待値（平均）が従う随伴輸送方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v(E)\boldsymbol{\Omega}\nabla \right) \langle C_G(T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \\ &= -v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E) \langle C_G(T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \\ & \quad + \int_0^{\infty} dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') \langle C_G(T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \rangle \\ & \quad + v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu_p=0}^{\infty} \sum_{\nu_{d,1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^{\infty} p_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\ & \quad \times \left\{ v_p \left(\int_0^{\infty} dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{i,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \rangle \right) + \sum_{i=1}^6 \nu_{d,i} \langle C_{d,i}(T | \mathbf{r}, t) \rangle \right\} \\ & \quad + v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E) \xi(t, T) \end{aligned} \quad (4-38)$$

導出された上式の意味を考えると、上式は検出反応 $v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)\xi(t, T)$ に対するインポートランス（重要度）の随伴輸送方程式を表しており、 $\langle C_G(T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$ がそのインポートランスに相当することが分かる。

同様に、1個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の確率母関数 $G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式(4-34)式を Z について1回偏微分し $Z=1$ を代入することで、時刻 t において位置 \mathbf{r} に1個の i 群の遅発中性子先行核が投入された場合における中性子検出数の期待値（平均）が従う随伴方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle C_{d,i}(T | \mathbf{r}, t) \rangle \\ & = \lambda_i \langle C_{d,i}(T | \mathbf{r}, t) \rangle - \lambda_i \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} \langle C_G(T | \mathbf{r}, E', \Omega', t) \rangle \end{aligned} \quad (4-39)$$

ただし(4-38)、(4-39)式の終期条件および境界条件は以下のようにになる。

$$\langle C_G(T | \mathbf{r}, E, \Omega, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-40)$$

$$\langle C_G(T | \mathbf{r}', E, \Omega', t) \rangle = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\Omega' > 0) \quad (4-41)$$

$$\langle C_{d,i}(T | \mathbf{r}, E, \Omega, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-42)$$

4.4.3.2 中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値が従う随伴輸送方程式

1個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \Omega, t)$ の偏微分方程式(4-31)式を Z について2回偏微分し $Z=1$ を代入することで、時刻 t において位置 \mathbf{r} にエネルギー E 、方向 Ω で1個の中性子が投入された場合における中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値が従う随伴輸送方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v(E)\Omega \nabla \right) \langle C_G(C_G - 1)(T | \mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \\ & = -v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E) \langle C_G(C_G - 1)(T | \mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \\ & \quad + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \Omega \rightarrow \Omega') \langle C_G(C_G - 1)(T | \mathbf{r}, E', \Omega', t) \rangle \\ & \quad + v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu_p=0}^\infty \sum_{\nu_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^\infty P_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\ & \quad \times \left\{ \begin{aligned} & \nu_p \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(C_G - 1)(T | \mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right) + \sum_{i=1}^6 \nu_{d,i} \langle C_{d,i}(C_{d,i} - 1)(T | \mathbf{r}, t) \rangle \\ & \nu_p (\nu_p - 1) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T | \mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right)^2 + \sum_{i=1}^6 \nu_{d,i} (\nu_{d,i} - 1) \langle C_{d,i}(T | \mathbf{r}, t) \rangle^2 \\ & + 2 \sum_{i=1}^6 \nu_p \nu_{d,i} \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T | \mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right) \langle C_{d,i}(T | \mathbf{r}, t) \rangle \\ & + 2 \sum_{i=1}^5 \sum_{i'=i+1}^6 \nu_{d,i} \nu_{d,i'} \langle C_{d,i}(T | \mathbf{r}, t) \rangle \langle C_{d,i'}(T | \mathbf{r}, t) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4-43) \end{aligned}$$

導出された上式の意味を考えると、上式は核分裂反応により連鎖反応家系が2又に分岐することに起因する以下の量、

$$\nu_p (\nu_p - 1) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T | \mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right)^2$$

：即発中性子により連鎖反応家系が2又に分岐

$$\sum_{i=1}^6 \nu_{d,i} (\nu_{d,i} - 1) \langle C_{d,i}(T | \mathbf{r}, t) \rangle^2$$

：同じ i 群の遅発中性子先行核により連鎖反応家系が2又に分岐

$$2 \sum_{i=1}^6 \nu_p \nu_{d,i} \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{fp}(E')}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \right) \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r}, t) \rangle$$

: 即発中性子と i 群の遅発中性子先行核により連鎖反応家系が 2 又に分岐

$$2 \sum_{i=1}^5 \sum_{i'=i+1}^6 \nu_{d,i} \nu_{d,i'} \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r}, t) \rangle \langle C_{d,i'}(T|\mathbf{r}, t) \rangle$$

: 異なる i 群と i' 群の遅発中性子先行核により連鎖反応家系が 2 又に分岐

に対するインポートランスの随伴輸送方程式を表しており、 $\langle C_G(C_G - 1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$ がそのインポートランスに相当することが分かる。仮に非増倍体系を考えた場合、核分裂そのものが起こらず連鎖反応家系が 2 又に分岐することがないので、任意の時刻 t に対して $\langle C_G(C_G - 1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle = 0$ が成立する。これは、投入された 1 個の中性子が増えないため、中性子検出数が 0 か 1 しか取り得ないことを意味する

同様に、1 個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の確率母関数 $G_{d,i}(Z, T|\mathbf{r}, t)$ の偏微分方程式(4-34)式を Z について 2 回偏微分し $Z=1$ を代入することで、時刻 t において位置 \mathbf{r} に 1 個の i 群の遅発中性子先行核が投入された場合における中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値が従う随伴方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle C_{d,i}(C_{d,i} - 1)(T|\mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \lambda_i \langle C_{d,i}(C_{d,i} - 1)(T|\mathbf{r}, t) \rangle - \lambda_i \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} \langle C_G(C_G - 1)(T|\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) \rangle \end{aligned} \quad (4-44)$$

ただし(4-43)、(4-44)式の終期条件および境界条件は以下のようになる。

$$\langle C_G(C_G - 1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-45)$$

$$\langle C_G(C_G - 1)(T|\mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n \cdot \boldsymbol{\Omega}' > 0) \quad (4-46)$$

$$\langle C_{d,i}(C_{d,i} - 1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-47)$$

4.4.3.3 中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値が従う随伴輸送方程式

1 個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数 $G_G(Z, T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の偏微分方程式(4-31)式を Z について 3 回偏微分し $Z=1$ を代入することで、時刻 t において位置 \mathbf{r} にエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ で 1 個の中性子が投入された場合における中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値が従う随伴輸送方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(E)\boldsymbol{\Omega}\nabla\right)\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \\
 & = -v(E)\Sigma_t(\mathbf{r},E)\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \\
 & + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r},E \rightarrow E',\boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}')\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r},E',\boldsymbol{\Omega}',t)\rangle \\
 & + v(E)\Sigma_f(\mathbf{r},E) \sum_{\nu_p=0}^\infty \sum_{\nu_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^\infty P_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\
 & \left[\begin{aligned}
 & \nu_p \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r},E',\boldsymbol{\Omega}',t)\rangle \right) + \sum_{i=1}^6 \nu_{d,i} \langle C_{d,i}(C_{d,i}-1)(C_{d,i}-2)(T|\mathbf{r},t)\rangle \\
 & + 3\nu_p(\nu_p-1) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \right) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \right) \\
 & + 3 \sum_{i=1}^6 \nu_{d,i} (\nu_{d,i}-1) \langle C_{d,i}(C_{d,i}-1)(T|\mathbf{r},t)\rangle \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle \\
 & + 3 \sum_{i=1}^6 \nu_p \nu_{d,i} \left\{ \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \right) \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle \right. \\
 & \left. + \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \right) \langle C_{d,i}(C_{d,i}-1)(T|\mathbf{r},t)\rangle \right\} \\
 & + 3 \sum_{i=1}^5 \sum_{i'=i+1}^6 \nu_{d,i} \nu_{d,i'} \left\{ \langle C_{d,i}(C_{d,i}-1)(T|\mathbf{r},t)\rangle \langle C_{d,i'}(T|\mathbf{r},t)\rangle + \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle \langle C_{d,i'}(C_{d,i'}-1)(T|\mathbf{r},t)\rangle \right\} \\
 & \times \left. \begin{aligned}
 & + \nu_p(\nu_p-1)(\nu_p-2) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \right)^3 + \sum_{i=1}^6 \nu_{d,i} (\nu_{d,i}-1)(\nu_{d,i}-2) \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle^3 \\
 & + 3 \sum_{i=1}^6 \nu_p(\nu_p-1) \nu_{d,i} \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \right)^2 \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle \\
 & + 3 \sum_{i=1}^6 \nu_p \nu_{d,i} (\nu_{d,i}-1) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \right) \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle^2 \\
 & + 3 \sum_{i=1}^5 \sum_{i'=i+1}^6 \nu_{d,i} (\nu_{d,i}-1) \nu_{d,i'} \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle^2 \langle C_{d,i'}(T|\mathbf{r},t)\rangle \\
 & + 3 \sum_{i=1}^5 \sum_{i'=i+1}^6 \nu_{d,i} \nu_{d,i'} (\nu_{d,i'}-1) \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle \langle C_{d,i'}(T|\mathbf{r},t)\rangle^2 \\
 & + 6 \sum_{i=1}^5 \sum_{i'=i+1}^6 \nu_p \nu_{d,i} \nu_{d,i'} \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle \right) \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle \langle C_{d,i'}(T|\mathbf{r},t)\rangle \\
 & + 6 \sum_{i=1}^4 \sum_{i'=i+1}^5 \sum_{i''=i'+1}^6 \nu_{d,i} \nu_{d,i'} \nu_{d,i''} \langle C_{d,i}(T|\mathbf{r},t)\rangle \langle C_{d,i'}(T|\mathbf{r},t)\rangle \langle C_{d,i''}(T|\mathbf{r},t)\rangle
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{4-48}$$

導出された上式の意味を考えると、上式は

- 1) 連鎖反応家系が 2 又は 2 回分岐することに起因する量 (ν_p 、 $\nu_{d,i}$ の二次モーメント成分)
 - 2) 連鎖反応家系が 3 又は 3 回分岐することに起因する量 (ν_p 、 $\nu_{d,i}$ の三次モーメント成分)
- に対するインポートランスの随伴輸送方程式を表しており、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle$ がそのインポートランスに相当することが分かる。仮に非増倍体系を考えた場合、 $\langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle$ の場合と同様、核分裂そのものが起こらず分岐することがないので、任意の時刻 t に対して $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)\rangle = 0$ が成立する。

同様に、1 個の i 群の遅発中性子先行核が体系に投入された場合の確率母関数 $G_{d,i}(Z, T|\mathbf{r}, t)$ の偏

微分方程式(4-34)式を Z について 3 回偏微分し $Z=1$ を代入することで、時刻 t において位置 \mathbf{r} に 1 個の i 群の遅発中性子先行核が投入された場合における中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値が従う随伴方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \langle C_{d,i} (C_{d,i} - 1) (C_{d,i} - 2) (T | \mathbf{r}, t) \rangle \\ &= \lambda_i \langle C_{d,i} (C_{d,i} - 1) (C_{d,i} - 2) (T | \mathbf{r}, t) \rangle - \lambda_i \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} \langle C_G (C_G - 1) (C_G - 2) (T | \mathbf{r}, E', \Omega', t) \rangle \end{aligned} \quad (4-49)$$

ただし(4-48)、(4-49)式の終期条件および境界条件は以下のようになる。

$$\langle C_G (C_G - 1) (C_G - 2) (T | \mathbf{r}, E, \Omega, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-50)$$

$$\langle C_G (C_G - 1) (C_G - 2) (T | \mathbf{r}', E, \Omega', t) \rangle = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\Omega' > 0) \quad (4-51)$$

$$\langle C_{d,i} (C_{d,i} - 1) (C_{d,i} - 2) (T | \mathbf{r}, E, \Omega, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-52)$$

4.5 外部中性子源が体系に投入された場合の中性子検出確率

ここでは、上で導出した 1 個の中性子が体系に投入された場合の検出確率 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \Omega, t)$ を利用することで、「外部中性子源が体系に投入された後、 C 個の中性子が検出される確率 $P(C)$ 」を求める。

まずは「外部中性子源が体系に投入された後、 C 個の中性子が検出される確率 $P(C)$ 」のバランス方程式を導出する^[25]。次に、導出された検出確率 $P(C)$ のバランス方程式を確率母関数 $G(Z)$ の方程式に変換する。得られた確率母関数 $G(Z)$ の方程式を解くことにより、この確率母関数 $G(Z)$ と 1 個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \Omega, t)$ を結びつける、バートレットの公式を導出する。こうして得られたバートレットの公式を利用することで、外部中性子源が投入された場合の中性子検出数階乗モーメントの期待値が従う積分方程式を導出することができる。

4.5.1 外部中性子源が体系に投入された場合の中性子検出確率のバランス方程式

時刻 t において外部中性子源 $S(\mathbf{r})$ が体系に投入され、検出終了時刻まで外部中性子源が崩壊し続けることにより、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率を $P(C, T | t)$ とする。

この検出確率 $P(C, T | t)$ は以下のような終期条件を満足する。

$$P(C, T | t') = \delta_{C0} \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-53)$$

：検出終了後に外部中性子が投入された場合、中性子は検出されない

時刻 t に投入された外部中性子源が微小時間 Δt 後に崩壊するかどうかを考えることで、時刻 t における検出確率 $P(C, T | t)$ と、時刻 $t + \Delta t$ における検出確率 $P(C, T | t + \Delta t)$ の間に以下のような確率バランス方程式が導かれる。

1) 外部中性子源が崩壊しない場合

時刻 t において体系に投入された外部中性子源が、微小時間 Δt 後に崩壊しない場合について考える。外部中性子源が微小時間 Δt 後に体系内の任意の場所で崩壊する確率は、線源強度の空間分布 $S(\mathbf{r})$ を全空間で積分することで

$$\int_V S(\mathbf{r}) \Delta t \, d\mathbf{r} \quad (4-54)$$

と表される。逆に言えば、外部中性子源が微小時間 Δt 後に崩壊しない確率は

$$\left(1 - \int_V S(\mathbf{r}) \Delta t \, d\mathbf{r} \right) \quad (4-55)$$

となる。この場合、微小時間 Δt 後に外部中性子源が崩壊しないので、時刻 $t + \Delta t$ において新たに外部中性子源が投入されたとみなすことができる。すなわち、微小時間 Δt 後に崩壊しなかった外部中性子源が検出終了時刻まで崩壊し続けることにより、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は $P(C, T | t + \Delta t)$ と表される。

従って、時刻 t において投入された外部中性子源が、微小時間 Δt 後に崩壊せずに、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$\left(1 - \int_V S(\mathbf{r}) \Delta t \, d\mathbf{r} \right) P(C, T | t + \Delta t) \quad (4-56)$$

2) 外部中性子源が崩壊する場合

時刻 t において体系に投入された外部中性子源が、微小時間 Δt 後に崩壊する場合について考える。外部中性子源が微小時間 Δt 後に位置 \mathbf{r} で崩壊する確率は、線源強度の空間分布 $S(\mathbf{r})$ を用いて $S(\mathbf{r}) \Delta t \, d\mathbf{r}$ で表される。微小時間 Δt 後に外部中性子源が崩壊することにより、新たに q 個の中性子が体系に投入される。ただし、外部中性子源の崩壊により q 個の中性子が発生する確率を $p_s(q)$ とする。ここで、微小時間 Δt 後にも外部中性子源が体系内に存在していることに注意しなければならない。従って、外部中性子源の崩壊により発生した q 個の中性子と、時刻 $t + \Delta t$ における外部中性子源により、最終的に検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出されなければならないので、合わせて C 個の中性子が検出されるように確率が畳み込まれる。

外部中性子源の崩壊により発生した q 個の中性子は、外部中性子源のエネルギースペクトル $\chi_s(E)$ に従って体系に等方向的に放出される。外部中性子源の崩壊で発生する中性子について全エネルギー E 、全方向 Ω で積分することにより、外部中性子源の崩壊により時刻 $t + \Delta t$ において 1 個の中性子が発生することにより、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のようを得られる。

$$\int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \Omega, t + \Delta t) \quad (4-57)$$

時刻 $t + \Delta t$ に体系内に存在している外部中性子源が検出終了時刻まで崩壊し続けることにより検出される中性子数についても、時刻 $t + \Delta t$ において新たに外部中性子源が投入されたと考えればよい。従って、時刻 $t + \Delta t$ における外部中性子源が検出終了時刻まで崩壊することにより、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は $P(C, T | t + \Delta t)$ と表される。

従って、以上で述べた外部中性子源の崩壊により発生した中性子による検出確率(4-57)式と $P(C, T | t + \Delta t)$ を畳み込むことで、時刻 t において投入された外部中性子源が、微小時間 Δt 後に崩

壊して、検出時間幅 T の間に C 個の中性子が検出される確率は以下のように表される。

$$\int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \Delta t \sum_{q=0}^{\infty} p_s(q) \sum_{\sum c_j=C} P(c_0, T | t + \Delta t) \times \left\{ \delta_{q_0} + (1 - \delta_{q_0}) \left(\prod_{j=1}^q \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} P_G(c_j, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t) \right) \right\} \quad (4-58)$$

ただし上式において、

- c_0 : 外部中性子源が検出終了時刻まで崩壊し続けることにより、検出される中性子数
- c_j : 外部中性子源の崩壊により中性子が j 個発生した際に、 j 番目の 1 個の中性子が体系に投入されることで検出される中性子数

$$\sum_{\sum c_j=C} : \sum_j c_j = C \text{ を満足する全ての場合について和をとる}$$

ことをそれぞれ意味する。

時刻 t に外部中性子源が投入されたときの確率 $P(C, T | t)$ と、上の **1)**、**2)** で述べた微小時間 Δt 後の検出確率の総和が同じでなければならないので、検出確率 $P(C, T | t)$ 、 $P(C, T | t + \Delta t)$ 、 $P_G(C, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t)$ の間の確率バランス方程式が以下のように導出される

$$\begin{aligned} & P(C, T | t) \\ &= \left(1 - \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \Delta t \right) P(C, T | t + \Delta t) \\ &+ \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \Delta t \sum_{q=0}^{\infty} p_s(q) \sum_{\sum c_j=C} P(c_0, T | t + \Delta t) \times \left\{ \delta_{q_0} + (1 - \delta_{q_0}) \left(\prod_{j=1}^q \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} P_G(c_j, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t + \Delta t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4-59)$$

上式において $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を取ることで、外部中性子源が体系に投入された場合の中性子検出確率のバランス方程式について、以下のような微分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} P(C, T | t) \\ &= \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) P(C, T | t) \\ &- \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} p_s(q) \sum_{\sum c_j=C} P(c_0, T | t) \times \left\{ \delta_{q_0} + (1 - \delta_{q_0}) \left(\prod_{j=1}^q \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} P_G(c_j, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4-60)$$

4.5.2 外部中性子源が投入された場合の確率母関数の微分方程式

外部中性子源が投入された場合の検出確率 $P(C, T | t)$ の確率母関数 $G(Z, T | t)$ を以下のように定義する。

$$G(Z, T | t) \equiv \sum_{C=0}^{\infty} Z^C P(C, T | t) \quad (4-61)$$

上で求められた検出確率 $P(C, T | t)$ の微分方程式(4-60)式を利用することにより、確率母関数 $G(Z, T | t)$ の微分方程式を求めることができる。

まず、確率母関数 $G(Z, T | t)$ の終期条件は以下ようになる。

$$G(Z, T | t') = 1 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (4-62)$$

検出確率 $P(C, T | t)$ の微分方程式(4-60)式の両辺に Z^C をかけて、全て C について和をとることで、外部中性子源が体系に投入された場合の確率母関数 $G(Z, T | t)$ の微分方程式を以下のように導出することができる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(Z, T | t) \\ = \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) G(Z, T | t) \\ - \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) G(Z, T | t) \sum_{q=0}^{\infty} p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \Omega, t) \right)^q \end{aligned} \quad (4-63)$$

ただし上式を導出する際に、確率 P 、 P_G の畳み込みが確率母関数 G 、 G_G の積となることを利用した。上式において、 $Z=1$ を代入すると

$$0 = \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) - \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \quad (4-64)$$

という当たり前の結果が得られる。

4.5.3 バートレットの公式

上で導出された確率母関数 $G(Z, T | t)$ の微分方程式(4-63)式の両辺を $G(Z, T | t)$ で割り、時刻 t について $t \leq t' \leq t_{\text{close}}$ の時間範囲で積分することで、以下のように解くことができる。

$$\ln(G(Z, T | t)) = \int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \Omega, t') \right)^q - 1 \right\} \quad (4-65)$$

さらに上式を整理することで、以下のような積分方程式を得ることができる。

$$G(Z, T | t) = \exp \left[\int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \Omega, t') \right)^q - 1 \right\} \right] \quad (4-66)$$

上式は、1個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \Omega, t)$ と、外部中性子源が体系に投入された場合の確率母関数 $G(Z, T | t)$ とを結びつける式であり、バートレットの公式と呼ばれる。以下で示すように、バートレットの公式を利用することにより、外部中性子源が投入された場合の中性子検出数階乗モーメントの期待値が従う積分方程式を導出することができる。

4.5.4 中性子検出数の階乗モーメントの期待値が従う積分方程式

外部中性子源が体系に投入された場合の確率母関数 $G(Z, T | t)$ を Z で n 回偏微分して $Z=1$ とすることで、時刻 t において外部中性子源が投入された場合における中性子検出数の n 次の階乗モーメントの期待値を得ることができる。

$$\left. \frac{\partial^n G}{\partial Z^n} \right|_{Z=1} = \sum_{C=0}^{\infty} C(C-1)\cdots(C-n+1)P(C, T|t) = \langle C(C-1)\cdots(C-n+1)(T|t) \rangle \quad (4-67)$$

以下で具体的に示すように、上で導出されたパートレットの公式(4-66)式を Z について n 回偏微分し $Z=1$ を代入することで、直ちにそれらの中性子検出数の n 次階乗モーメントが従う積分方程式を導出することができる。

4.5.4.1 中性子検出数の期待値（平均）が従う積分方程式

パートレットの公式(4-66)式を Z で 1 回偏微分して $Z=1$ とすると、時刻 t に外部中性子源が投入された場合における検出時間幅 T の間に検出された中性子数の期待値（平均）が従う積分方程式を以下のように得ることができる。

$$\langle C(T|t) \rangle = \int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t') \rangle \quad (4-68)$$

体系に外部中性子源が投入されてから十分時間が経過した定常状態を考える場合には、以下のように無限の過去からの積分量となる。

$$\langle C(T) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle C(T|t) \rangle = \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \quad (4-69)$$

4.5.4.2 中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値が従う積分方程式

パートレットの公式(4-66)式を Z で 2 回偏微分して $Z=1$ とすると、時刻 t に外部中性子源が投入された場合における検出時間幅 T の間に検出された中性子数の二次階乗モーメントの期待値が従う積分方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} & \langle C(C-1)(T|t) \rangle \\ &= \langle C(T|t) \rangle^2 \\ &+ \int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t') \rangle \\ &+ \int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t') \rangle \right)^2 \end{aligned} \quad (4-70)$$

体系に外部中性子源が投入されてから十分時間が経過した定常状態を考える場合には、以下のように無限の過去からの積分量となる。

$$\begin{aligned} & \langle C(C-1)(T) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle C(C-1)(T|t) \rangle \\ &= \langle C(T) \rangle^2 \\ &+ \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \\ &+ \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right)^2 \end{aligned} \quad (4-71)$$

上で導出された中性子検出数の積分方程式において、 q の二次階乗モーメントを含んだ項は外部中性子源の崩壊により 2 又に分岐することに起因する。

4.5.4.3 中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値が従う積分方程式

バートレットの公式(4-66)式を Z で 3 回偏微分して $Z=1$ とすると、時刻 t に外部中性子源が投入された場合における検出時間幅 T の間に検出された中性子数の三次階乗モーメントの期待値が従う積分方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned}
 & \langle C(C-1)(C-2)(T|t) \rangle \\
 &= 3\langle C(C-1)(T|t) \rangle \langle C(T|t) \rangle - 2\langle C(T|t) \rangle^3 \\
 &+ \int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t') \rangle \\
 &+ 3 \int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t') \rangle \right) \\
 &\quad \times \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t') \rangle \right) \\
 &+ \int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)(q-2) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t') \rangle \right)^3
 \end{aligned} \tag{4-72}$$

体系に外部中性子源が投入されてから十分時間が経過した定常状態を考える場合には、以下のように無限の過去からの積分量となる。

$$\begin{aligned}
 & \langle C(C-1)(C-2)(T) \rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle C(C-1)(C-2)(T|t) \rangle \\
 &= 3\langle C(C-1)(T) \rangle \langle C(T) \rangle - 2\langle C(T) \rangle^3 \\
 &+ \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \\
 &+ 3 \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \right) \\
 &\quad \times \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \right) \\
 &+ \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)(q-2) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \right)^3
 \end{aligned} \tag{4-73}$$

上で導出された中性子検出数の積分方程式において、 q の二次階乗モーメントを含んだ項は外部中性子源の崩壊により 2 又に分岐することに起因し、同様に q の三次階乗モーメントを含んだ項は外部中性子源の崩壊により 3 又に分岐することに起因する。

4.6 空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論

以上で導出された、1)1 個の中性子が体系に投入された場合、2)1 個の遅発中性子先行核が体系に投入された場合、3)外部中性子源が体系に投入された場合における中性子検出数の階乗モーメントの期待値を利用することで、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論を以下で示す。

4.6.1 二次相関量 Y 値の一般理論

以上で導出された(4-69)、(4-71)式より、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた二次相関量 Y 値は以下のように表される。

$$Y(T) \equiv \frac{\langle C(C-1)(T) \rangle - \langle C(T) \rangle^2}{\langle C(T) \rangle} = \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \\ & + \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-74)$$

$$\left/ \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle \right.$$

ただし上式において $\langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$ は随伴輸送方程式(4-38)、(4-39)式の解であり、同様に $\langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$ は随伴輸送方程式(4-43)、(4-44)式の解である。中性子束の輸送方程式を決定論的手法により解くのと同様に、これらの随伴輸送方程式を位置 \mathbf{r} 、エネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ 、時刻 t について離散化することで、決定論的手法により $\langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$ の数値解を求めることができる。(4-74)式を利用して、決定論的手法により得られた $\langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \rangle$ を数値積分すれば、二次相関量 Y 値を数値計算により求めることができる。

4.6.2 三次相関量 X 値の一般理論

以上で導出された(4-69)、(4-73)式より、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた三次相関量 X 値は以下のように表される。

$$X(T) \equiv \frac{\langle C(C-1)(C-2)(T) \rangle - 3\langle C(C-1)(C-2)(T) \rangle \langle C(T) \rangle + 2\langle C(T) \rangle^2}{\langle C(T) \rangle}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \\ & + 3 \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right) \\ & \times \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right) \\ & + \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)(q-2) p_s(q) \left(\int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right)^3 \\ & \left/ \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle \right. \end{aligned} \right\} \quad (4-75)$$

ただし Y 値の場合と同様に、 $\langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ と $\langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ は随伴輸送方程式(4-38)、(4-39)、(4-43)、(4-44)式の解であり、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ は随伴輸送方程式(4-48)、(4-49)式の解である。 Y 値の場合と同様に、これらの随伴輸送方程式を位置 \mathbf{r} 、エネルギー E 、方向 Ω 、時刻 t について差分化することで、決定論的手法により $\langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ の数値解を求めることができる。(4-75)式を利用して、決定論的手法により得られた $\langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ を数値積分すれば、三次相関量 X 値を数値計算により求めることができる。

4.6.3 確率母関数の拡散近似式

以上のように、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論を導出することができた。それらを用いて Y 、 X 値を数値計算することを考えた場合、 $\langle C_G(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) \rangle$ の数値解を求めるために時間依存の随伴輸送方程式を解く必要がある。これらの時間依存の随伴輸送方程式を解く際、体系の角度方向の依存性がそれほど重要でないならば、拡散近似を適用することで中性子の飛行方向 Ω の依存性を省略することができ、計算時間を短縮することができる。そこで、1個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数 $G_G(Z, T|\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ に対して拡散近似を適用し、確率母関数 $G_G(Z, T|\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ の拡散近似式を導出する。

まず確率母関数 $G_G(Z, T|\mathbf{r}, E, \Omega, t)$ を以下のように球面調和関数 $Y_{lm}(\Omega)$ で展開する。

$$G_G(Z, T|\mathbf{r}, E, \Omega, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{m=-l}^l g_{lm}(Z, T|\mathbf{r}, E, t) Y_{lm}(\Omega) \quad (4-76)$$

$$Y_{lm}(\Omega) = (-1)^{(m+|m|)/2} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{-im\phi} \quad (4-77)$$

上式において、 $g_{lm}(Z, T|\mathbf{r}, E, t)$ は $Y_{lm}(\Omega)$ の展開係数を表し、また $P_l^{|m|}(x)$ はルジャンドルの陪多項式を表す。

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|l+|m||}(x^2-1)}{dx^{|l+|m||}} \quad (4-78)$$

球面調和関数 $Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega})$ は以下のような直交条件を満足する。

$$\int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} Y_{l'm'}^*(\boldsymbol{\Omega}) Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{l'l'} \delta_{m'm'} \quad (4-79)$$

ただし $Y_{lm}^*(\boldsymbol{\Omega})$ は $Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega})$ の複素共役を表す。よって展開係数 g_{lm} は以下のように求められる。

$$g_{lm}(Z, T | \mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} Y_{lm}^*(\boldsymbol{\Omega}) G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (4-80)$$

確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ が従う偏微分方程式(4-31)、(4-34)式を球面調和関数で展開し、

$$G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \cong \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^L (2l+1) \sum_{m=-l}^l g_{lm}(Z, T | \mathbf{r}, E, t) Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}) \quad (4-81)$$

のように l を L まで打ち切ること、中性子束の輸送方程式の P_L 近似式を導出する場合と同様に、確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ が従う偏微分方程式の P_L 近似式を導出することができる。

ここで $L=1$ までを考えれば、確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ が従う偏微分方程式の P_1 近似式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) + v(E) \nabla \mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \right) \\ & = -v(E) \Sigma_i(\mathbf{r}, E) \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \\ & \quad + \int_0^\infty dE' v(E) \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E \rightarrow E') \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \\ & \quad + v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu_p=0}^\infty \sum_{\nu_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^\infty p_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\ & \quad \times \left(\int_0^\infty dE' \chi_{fp}(E') \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E', t) \right)^{\nu_p} \left\{ \prod_{i=1}^6 (G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t))^{\nu_{d,i}} \right\} \\ & \quad + v(E) \Sigma_c(\mathbf{r}, E) + v(E) \Sigma_d(\mathbf{r}, E) \\ & \quad + v(E) \Sigma_d(\mathbf{r}, E) \xi(t, T) (Z-1) \end{aligned} \quad (4-82)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) + \frac{1}{3} \nabla \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \right) \\ & = -\Sigma_i(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \\ & \quad + \int_0^\infty dE' \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E \rightarrow E') \mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E', t) \end{aligned} \quad (4-83)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t) \\ & = \lambda_i G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t) - \lambda_i \int_0^\infty dE' \chi_{d,i}(E') \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E', t) \end{aligned} \quad (4-84)$$

ただし上式において、 $\Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ 、 $\mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ は以下のように定義される。

$$\Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (4-85)$$

: 確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の全立体角平均

$$\mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega} G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \quad (4-86)$$

: 確率母関数の流れ $\boldsymbol{\Omega} G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ の全立体角平均

また $\Sigma_{s,l}(\mathbf{r}, E \rightarrow E')$ は巨視的散乱断面積の l 次の非等方性散乱成分を表す。

ここでさらに、確率母関数の流れの全立体角平均を表す $\mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ に対して、以下のような拡散近似を適用する。

$$\mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \cong D(\mathbf{r}, E) \nabla \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \quad (4-87)$$

ただし $D(\mathbf{r}, E)$ は拡散係数を表す。上式を用いることで、 $\mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ を $\Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ の勾配 (gradient) により表すことができる。従って、(4-82)式に(4-87)式に代入することで、 $\mathbf{J}_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ を消去することができ、以下のような確率母関数の全立体角平均 $\Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ の拡散近似式を得ることができる。

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v(E) D(\mathbf{r}, E) \nabla^2 \right) \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \\ & = -v(E) \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \\ & \quad + \int_0^\infty dE' v(E) \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E \rightarrow E') \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \\ & \quad + v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu_p=0}^\infty \sum_{\nu_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^\infty p_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\ & \quad \times \left(\int_0^\infty dE' \chi_{f,p}(E') \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E', t) \right)^{\nu_p} \left\{ \prod_{i=1}^6 (G_{d,i}(Z, T | \mathbf{r}, t))^{\nu_{d,i}} \right\} \\ & \quad + v(E) \Sigma_c(\mathbf{r}, E) + v(E) \Sigma_d(\mathbf{r}, E) \\ & \quad + v(E) \Sigma_d(\mathbf{r}, E) \xi(t, T) (Z - 1) \end{aligned} \quad (4-88)$$

上式と確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ が従う偏微分方程式(4-31)式を比較すると、(4-31)式における $v(E) \boldsymbol{\Omega} \nabla$ の項が $v(E) D(\mathbf{r}, E) \nabla^2$ に置換され、角度方向の積分がなくなっただけである。従って、 $\Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ から求められる中性子検出数の階乗モーメントの期待値が従う拡散方程式は、 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ から求められた中性子検出数の階乗モーメントの期待値が従う輸送方程式(4-38)、(4-43)、(4-48)式における $v(E) \boldsymbol{\Omega} \nabla$ の項を $v(E) D(\mathbf{r}, E) \nabla^2$ に置換し、角度方向の積分をなくすだけで得ることができる。

この確率母関数の全立体角平均 $\Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ を用いた場合、バートレットの公式は以下のように表される。

$$G(Z, T | t) = \exp \left[\int_t^{t_{\text{close}}} dt' \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \left\{ \sum_{q=0}^\infty p_s(q) \left(\int_0^\infty dE \chi_s(E) \Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t) \right)^q - 1 \right\} \right] \quad (4-89)$$

上のバートレットの公式と、確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ を用いた場合のバートレットの公式(4-66)式を比較すると、(4-66)式における角度方向の積分がなくなっただけである。結局 $\Gamma_G(Z, T | \mathbf{r}, E, t)$ を用いた場合も、外部中性子源が投入された場合の中性子検出数階乗モーメントの期待値が従う積分方程式について、 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ を用いた場合と同様の結果を得ることができる。

4.7 空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた

Y、X 値の飽和値の一般理論

以上では、任意の検出時間幅 T に対する、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論について述べてきた。本研究で注目している三次中性子相関法では、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値が必要であるため、これら Y 、 X 値の飽和値について特に考察する必要がある。

ここでは、1 個の中性子が体系に投入された場合の中性子検出数の階乗モーメントの期待値の定常解 $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を用いて、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値を求めることができることを示す。これは、 $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ について定常状態の随伴輸送方程式の解を求めればよいことを意味する。その際に、即発中性子と遅発中性子を区別する必要がないことが示される。また、固有関数展開を利用することで Y 、 X 値の飽和値の理論式を導出し、その結果が第 3 章で得られた結果と一致することを示す。さらに、 Y 、 X 値の飽和値が、定常状態における角度中性子束および検出反応に対するインポートランスを用いて表すことができることを示す。

4.7.1 確率母関数の定常解が従う偏微分方程式

確率母関数 $G_G(Z, T | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ が従う偏微分方程式(4-31)、(4-34)式において、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ として定常状態（時間微分項がゼロ）を考えると、確率母関数の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $G_{d,i}(Z, \infty | \mathbf{r})$ の偏微分方程式が以下のように得られる。

$$\begin{aligned} & -v(E)\boldsymbol{\Omega}\nabla G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\ & = -v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E)G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\ & \quad + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}')G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \\ & \quad + v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu_p=0}^\infty \sum_{\nu_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^\infty p_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \end{aligned} \quad (4-90)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right)^{\nu_p} \left\{ \prod_{i=1}^6 (G_{d,i}(Z, \infty | \mathbf{r}))^{\nu_{d,i}} \right\} \\ & \quad + v(E)\Sigma_c(\mathbf{r}, E) \\ & \quad + v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)Z \\ & 0 = \lambda_i G_{d,i}(Z, \infty | \mathbf{r}) - \lambda_i \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \end{aligned} \quad (4-91)$$

上式で求められる定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ は、体系に投入された 1 個の中性子を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の確率母関数を表す。同様に、定常解 $G_{d,i}(Z, \infty | \mathbf{r})$ は体系に投入された 1 個の i 群の遅発中性子先行核を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の確率母関数を表す。

ここで(4-91)式を変形することで、確率母関数 $G_{d,i}(Z, \infty | \mathbf{r})$ を以下のように表すことができる。

$$G_{d,i}(Z, \infty | \mathbf{r}) = \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \quad (4-92)$$

上式を(4-90)式に代入することで、(4-90)式から確率母関数 $G_{d,i}(Z, \infty | \mathbf{r})$ を消去することができ、以下のように確率母関数 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ のみの偏微分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned}
 & -v(E)\boldsymbol{\Omega}\nabla G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\
 & = -v(E)\Sigma_i(\mathbf{r}, E)G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\
 & \quad + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}')G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \\
 & \quad + v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu_p=0}^\infty \sum_{\nu_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^\infty p_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\
 & \quad \times \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right)^{\nu_p} \left\{ \prod_{i=1}^6 \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right)^{\nu_{d,i}} \right\} \\
 & \quad + v(E)\Sigma_c(\mathbf{r}, E) \\
 & \quad + v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)Z
 \end{aligned} \tag{4-93}$$

ここで、上式に現れる核分裂項について以下のように考える。核分裂反応が起きることにより、即発中性子スペクトル $\chi_{f,p}(E')$ に従って ν_p 個の即発中性子が発生し、同様に遅発中性子スペクトル $\chi_{d,i}(E')$ に従って $\nu_{d,i}$ 個の i 群の遅発中性子がそれぞれ発生し、合計 ν 個の中性子が発生する。これは言い換えると、核分裂反応が起きることによって核分裂スペクトル $\chi_f(E)$ に従って ν 個の中性子が発生することを意味する。従って、上式の核分裂項は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 & v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu_p=0}^\infty \sum_{\nu_{d,1}=0}^\infty \cdots \sum_{\nu_{d,6}=0}^\infty p_f(\nu_p, \nu_{d,1}, \dots, \nu_{d,6}, E) \\
 & \quad \times \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{f,p}(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right)^{\nu_p} \left\{ \prod_{i=1}^6 \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_{d,i}(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right)^{\nu_{d,i}} \right\} \\
 & = v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu=0}^\infty p_f(\nu, E) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_f(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right)^\nu
 \end{aligned} \tag{4-94}$$

上式において $\chi_f(E)$ は核分裂スペクトルを表す。結局、上式を利用することで確率母関数の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ の偏微分方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned}
 & -v(E)\boldsymbol{\Omega}\nabla G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\
 & = -v(E)\Sigma_i(\mathbf{r}, E)G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \\
 & \quad + \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E)\Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}')G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \\
 & \quad + v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu=0}^\infty p_f(\nu, E) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_f(E')}{4\pi} G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \right)^\nu \\
 & \quad + v(E)\Sigma_c(\mathbf{r}, E) \\
 & \quad + v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)Z
 \end{aligned} \tag{4-95}$$

上式より、確率母関数の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を考えた場合には、中性子束の輸送方程式同様に、即発中性子と遅発中性子の区別する必要がないことが分かる。

ただし、この確率母関数の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ は以下のような境界条件を満足する。

$$G_G(Z, \infty | \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}') = 1 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\boldsymbol{\Omega}' > 0) \tag{4-96}$$

4.7.2 中性子検出数の階乗モーメントの期待値の定常解が従う随伴輸送方程式

1個の中性子が体系に投入された場合の確率母関数の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を、 Z で n 回偏微分して $Z=1$ とすることで、位置 \mathbf{r} にエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ で投入された1個の中性子を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の n 次の階乗モーメントの期待値を得ることができる。以下で具体的に示すように、上で導出された確率母関数の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ の偏微分方程式(4-95)式を Z について n 回偏微分し $Z=1$ を代入することで、直ちにそれらの中性子検出数の n 次階乗モーメントの定常解が従う随伴輸送方程式を導出することができる。

1) 中性子検出数の期待値 (平均) の定常解が従う随伴輸送方程式

1個の中性子が体系に投入された場合の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ の偏微分方程式(4-95)式を Z について1回偏微分し $Z=1$ を代入することで、位置 \mathbf{r} にエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ で投入された1個の中性子を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の期待値 (平均) $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ が従う随伴輸送方程式を以下のように得ることができる。

$$\mathbf{B}^\dagger \langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle = v(E) \Sigma_d(\mathbf{r}, E) \quad (4-97)$$

ただし、 \mathbf{B}^\dagger はボルツマン演算子 \mathbf{B} の随伴演算子であり、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\dagger \equiv & -v(E) \boldsymbol{\Omega} \nabla + v(E) \Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' v(E) \Sigma_s(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}') \\ & - v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu p_f(\nu, E) \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_f(E')}{4\pi} \end{aligned} \quad (4-98)$$

また $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ は以下のような境界条件を満足する。

$$\langle C_G(\infty | \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}') \rangle = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\boldsymbol{\Omega}' > 0) \quad (4-99)$$

2) 中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値の定常解が従う随伴輸送方程式

1個の中性子が体系に投入された場合の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ の偏微分方程式(4-95)式を Z について2回偏微分し $Z=1$ を代入することで、位置 \mathbf{r} にエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ で投入された1個の中性子を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の二次階乗モーメント $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ が従う随伴輸送方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\dagger \langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\ = v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu=0}^{\infty} p_f(\nu, E) \nu(\nu - 1) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_f(E')}{4\pi} \langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \rangle \right)^2 \end{aligned} \quad (4-100)$$

ただし $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ は以下のような境界条件を満足する。

$$\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}') \rangle = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\boldsymbol{\Omega}' > 0) \quad (4-101)$$

3) 中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値の定常解が従う随伴輸送方程式

1個の中性子が体系に投入された場合の定常解 $G_G(Z, \infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ の偏微分方程式(4-95)式を Z について3回偏微分し $Z=1$ を代入することで、位置 \mathbf{r} にエネルギー E 、方向 $\boldsymbol{\Omega}$ で投入された1個の中性子を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の三次階乗モーメント $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ が従う随伴輸送方程式を以下のように得ることができる。

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{B}^\dagger \langle C_G (C_G - 1) (C_G - 2) (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\
 &= v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \sum_{\nu=0}^{\infty} p_f(\nu, E) \\
 & \quad \times \left\{ \begin{aligned} & 3\nu(\nu-1) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_f(E')}{4\pi} \langle C_G (C_G - 1) (\infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \rangle \right) \\ & \times \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_f(E')}{4\pi} \langle C_G (\infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \rangle \right) \\ & + \nu(\nu-1)(\nu-2) \left(\int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \frac{\chi_f(E')}{4\pi} \langle C_G (\infty | \mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') \rangle \right)^3 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{4-102}$$

ただし $\langle C_G (C_G - 1) (C_G - 2) (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ は以下のような境界条件を満足する。

$$\langle C_G (C_G - 1) (C_G - 2) (\infty | \mathbf{r}', E, \boldsymbol{\Omega}') \rangle = 0 \quad (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n \cdot \boldsymbol{\Omega}' > 0) \tag{4-103}$$

4.7.3 二次相関量 Y 値の飽和値の一般理論

二次相関量 Y 値を記述する(4-74)式において、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ として定常状態を考え、上の(4-97)、(4-100)式で得られる定常解 $\langle C_G (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G (C_G - 1) (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を代入することで、空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた二次相関量 Y 値の検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における飽和値 Y_∞ が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
 & Y_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} Y(T) \\
 &= \left\{ \begin{aligned} & \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G (C_G - 1) (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\ & + \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \left(\int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \right)^2 \end{aligned} \right\} \\
 & \quad \left/ \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \right.
 \end{aligned} \tag{4-104}$$

上式から分かるように、 Y 値の飽和値 Y_∞ は(4-97)、(4-100)式で表される $\langle C_G (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G (C_G - 1) (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ の定常状態の随伴輸送方程式を解くことにより求めることができる。

4.7.4 三次相関量 X 値の飽和値の一般理論

三次相関量 X 値を記述する(4-75)式において、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ として定常状態を考え、上の(4-97)、(4-100)、(4-102)式で得られる定常解 $\langle C_G (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G (C_G - 1) (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G (C_G - 1) (C_G - 2) (\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を代入することで、空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた三次相関量 X 値の検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における飽和値 X_∞ が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
 X_\infty &= \lim_{T \rightarrow \infty} X(T) \\
 &= \left\{ \begin{aligned}
 &\int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle \\
 &+ 3 \int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \left(\int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(C_G-1)(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle \right) \\
 &\times \left(\int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle \right) \\
 &+ \int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)(q-2) p_s(q) \left(\int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle \right)^3 \\
 &\left/ \int_V dr S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\Omega \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \langle C_G(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle \right.
 \end{aligned} \right\} \quad (4-105)
 \end{aligned}$$

上式から分かるように、 Y 値の飽和値 Y_∞ の場合と同様に、 X 値の飽和値 X_∞ は(4-97)、(4-100)、(4-102)式で表される $\langle C_G(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ の定常状態の随伴輸送方程式を解くことにより求めることができる。

4.7.5 固有関数展開を利用した Y 、 X 値の飽和値の理論式

ここでは、第3章で空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を導出する際に用いた、固有関数展開を利用することにより、(4-97)、(4-100)、(4-102)式で表された $\langle C_G(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ の理論式を求める。こうして得られた $\langle C_G(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(\infty|\mathbf{r}, E, \Omega) \rangle$ を(4-104)、(4-105)式に代入することにより、固有関数展開を利用した Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の理論式を導出する。

4.7.5.1 固有関数展開を利用した中性子検出数の階乗モーメントの期待値の定常解

第3章の場合と同様に、以下で定義される α 固有値方程式を考える。

$$\mathbf{B} \psi_n(\mathbf{r}, E, \Omega) = \alpha_n \psi_n(\mathbf{r}, E, \Omega) \quad (4-106)$$

$$\psi_n(\mathbf{r}', E, \Omega') = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\Omega' < 0) \quad (4-107)$$

ただし α_n は n 次モードの中性子減衰定数、 $\psi_n(\mathbf{r}, E, \Omega)$ は固有値 α_n に対応する n 次モードの固有関数を表し、 \mathbf{B} は以下のように定義されるボルツマン演算子である。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \equiv & v(E)\Omega \nabla + v(E)\Sigma_t(\mathbf{r}, E) - \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' v(E')\Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) \\
 & - \frac{\chi_f(E)}{4\pi} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' v(E')\Sigma_f(\mathbf{r}, E') \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu p_f(\nu, E')
 \end{aligned} \quad (4-108)$$

次に、上で定義される α 固有値方程式の随伴方程式を考える。

$$\mathbf{B}^\dagger \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \Omega) = \alpha_n \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \Omega) \quad (4-109)$$

$$\psi_n^\dagger(\mathbf{r}', E, \Omega') = 0 \quad \text{if } (\mathbf{r}' \in S \text{ and } n\Omega' > 0) \quad (4-110)$$

ただし $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \Omega)$ は固有値 α_n に対応する n 次モードの随伴固有関数を表し、 \mathbf{B}^\dagger は \mathbf{B} の随伴演算子であり(4-98)式で定義される。上で述べた固有関数 $\psi_m(\mathbf{r}, E, \Omega)$ 、 $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \Omega)$ は以下のような正

規直交条件を満足する。

$$\int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \psi_m^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \delta_{nm} \quad (4-111)$$

以下で示すように、上で述べた α 固有値方程式の随伴固有関数 $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いて固有関数展開することにより、(4-97)、(4-100)、(4-102)式で表された $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ の理論式を求めることができる。

1) 中性子検出数の期待値 (平均) の定常解 $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$

α 固有値方程式の随伴方程式の随伴固有関数 $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いて、(4-97)式の定常解 $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を以下のように展開できると仮定する。

$$\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle = \sum_n C_{1,n} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-112)$$

ただし $C_{1,n}$ は $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ の n 次モードの展開係数である。上の展開式を(4-97)式に代入し、両辺に α 固有値方程式の固有関数 $\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ をかけて全空間・エネルギー・方向で積分し、固有関数の正規直交性を利用することで、展開係数 $C_{1,n}$ を以下のように得ることができる。

$$C_{1,n} = \frac{D_n}{\alpha_n} \quad (4-113)$$

$$D_n \equiv \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} v(E) \Sigma_d(\mathbf{r}, E) \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-114)$$

以上より、1 個の中性子を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の期待値 (平均) $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を以下のように導出することができる。

$$\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle = \sum_n \frac{D_n}{\alpha_n} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-115)$$

2) 中性子検出数の二次階乗モーメントの期待値の定常解 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$

α 固有値方程式の随伴方程式の随伴固有関数 $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いて、(4-100)式の定常解 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を以下のように展開できると仮定する。

$$\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle = \sum_n C_{2,n} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-116)$$

ただし $C_{2,n}$ は $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ の n 次モードの展開係数である。上の展開式を(4-100)式に代入し、さらに(4-100)式中の $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ に(4-115)式を代入し、両辺に α 固有値方程式の固有関数 $\psi_l(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ をかけて全空間・エネルギー・方向で積分し、固有関数の正規直交性を利用することで、展開係数 $C_{2,l}$ を以下のように得ることができる。

$$C_{2,l} = \sum_m \sum_n \frac{F_{l \rightarrow mn} D_m D_n}{\alpha_l \alpha_m \alpha_n} \quad (4-117)$$

$$F_{l \rightarrow mn} \equiv \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \psi_l(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^{\infty} v(\nu - 1) p_f(\nu, E) \Psi_{f,m}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{f,n}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (4-118)$$

$$\Psi_{f,n}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_f(E)}{4\pi} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-119)$$

以上より、1 個の中性子を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の二次階乗モーメントの期待値 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を以下のように導出することができる。

$$\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle = \sum_l \sum_m \sum_n \frac{F_{l \rightarrow mm} D_m D_n}{\alpha_m \alpha_n} \psi_l^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-120)$$

3) 中性子検出数の三次階乗モーメントの期待値の期待値の定常解 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ α 固有値方程式の随伴方程式の随伴固有関数 $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いて、(4-102)式の定常解 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を以下のように展開できると仮定する。

$$\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle = \sum_n C_{3,n} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-121)$$

ただし $C_{3,n}$ は $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ の n 次モードの展開係数である。上の展開式を(4-102)式に代入し、さらに(4-102)式中の $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ に(4-115)、(4-120)式を代入し、両辺に α 固有値方程式の固有関数 $\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ をかけて全空間・エネルギー・方向で積分し、固有関数の正規直交性を利用することで、以下のように展開係数 C_{3j} を得ることができる。

$$C_{3,j} = 3 \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{F_{j \rightarrow kl} F_{k \rightarrow mm} D_l D_m D_n}{\alpha_j \alpha_k \alpha_l \alpha_m \alpha_n} + \sum_l \sum_m \sum_n \frac{F_{j \rightarrow lmm} D_l D_m D_n}{\alpha_j \alpha_l \alpha_m \alpha_n} \quad (4-122)$$

$$F_{k \rightarrow lmm} \equiv \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} v(E) \Sigma_f(\mathbf{r}, E) \psi_k(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1) p_f(\nu, E) \Psi_{l,l}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{l,m}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{l,n}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (4-123)$$

以上より、1 個の中性子を起源とした連鎖反応家系が絶滅するまでに検出された中性子数の三次階乗モーメントの期待値 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を以下のように導出することができる。

$$\begin{aligned} & \langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\ &= 3 \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{F_{j \rightarrow kl} F_{k \rightarrow mm} D_l D_m D_n}{\alpha_j \alpha_k \alpha_l \alpha_m \alpha_n} \psi_j^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \frac{F_{k \rightarrow lmm} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_l \alpha_m \alpha_n} \psi_k^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (4-124)$$

4.7.5.2 固有関数展開を利用した Y 値の飽和値の理論式

固有関数展開を利用して導出された $\langle C_G(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | \mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を、 Y 値の飽和値 Y_∞ を記述する(4-104)式に代入することにより、固有関数展開を利用した Y 値の飽和値 Y_∞ の理論式を以下のように導出することができる。

$$Y_\infty = \frac{1}{C_R} \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mm}}{\alpha_l} \right) + S_{mm} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_m \alpha_n} \quad (4-125)$$

$$C_R = \sum_n \frac{S_n D_n}{\alpha_n} : \text{計数率} \quad (4-126)$$

$$S_n \equiv \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q p_s(q) \Psi_{s,n}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (4-127)$$

$$S_{mm} \equiv \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1) p_s(q) \Psi_{s,m}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{s,n}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (4-128)$$

$$\Psi_{s,n}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-129)$$

こうして得られた Y 値の飽和値 Y_∞ の理論式は、第 3 章で物理的直感法により導出された Y_∞ の理論式(3-61)式と完全に一致する。

4.7.5.3 固有関数展開を利用した X 値の飽和値の理論式

Y 値の飽和値 Y_∞ の理論式を導出した場合と同様に、固有関数展開を利用して導出された $\langle C_G(\infty|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty|\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \rangle$ を、 X 値の飽和値 X_∞ を記述する(4-105)式に代入することにより、固有関数展開を利用した X 値の飽和値 X_∞ の理論式を以下のように導出することができる。

$$X_\infty = X_{2\infty} + X_{3\infty} \quad (4-130)$$

$$X_{2\infty} = \frac{3}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow ml} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_l \alpha_m \alpha_n} \quad (4-131)$$

$$X_{3\infty} = \frac{1}{C_R} \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmn}}{\alpha_k} \right) + S_{lmn} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_l \alpha_m \alpha_n} \quad (4-132)$$

$$S_{lmn} \equiv \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^{\infty} q(q-1)(q-2) p_s(q) \Psi_{s,l}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{s,m}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{s,n}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (4-133)$$

こうして得られた X 値の飽和値 X_∞ の理論式は、第3章で物理的直感法により導出された X_∞ の理論式(3-73)、(3-75)式と完全に一致する。

4.7.6 定常状態における角度中性子束および検出反応に対する随伴角度中性子数密度を利用した Y 、 X 値の飽和値の理論式

ここでは、固有関数展開を利用して導出された Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の理論式(4-125)、(4-131)、(4-132)式の見方を変えて、定常状態における以下の3つの量を用いて表すことができることを示す。すなわち、1) 定常状態における角度中性子束 $f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、2) 定常状態における検出反応に対するインポートランス（随伴角度中性子数密度） $n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、3) 定常状態における、核分裂反応で連鎖反応家系が二又に分岐して中性子が検出される反応に対するインポートランス（随伴角度中性子束） $n_{1 \rightarrow 2d}^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、の3つの量を用いて Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ を表すことができる。

4.7.6.1 定常状態における角度中性子束

定常状態における体系の角度中性子数密度 $n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ は、(4-108)式で定義されるボルツマン演算子 \mathbf{B} を用いて以下のように表される。

$$\mathbf{B} n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\chi_s(E)}{4\pi} S(\mathbf{r}) \quad (4-134)$$

ここで、 α 固有値方程式の固有関数 $\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いて、定常状態における体系の角度中性子数密度 $n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を以下のように展開することができると仮定する。

$$n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_n N_n \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-135)$$

ただし N_n は $n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ の n 次モードの展開係数である。上の展開式を(4-134)式に代入し、両辺に α 固有値方程式の随伴方程式の随伴固有関数 $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ をかけて全空間・エネルギー・方向で積分し、固有関数の正規直交性を利用することで、展開係数 N_n を以下のように得ることができる。

$$N_n = \frac{S_n}{\alpha_n} \quad (4-136)$$

以上より、定常状態における角度中性子数密度 $n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ が固有関数展開により以下のように表されるのが分かる。

$$n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_n \frac{S_n}{\alpha_n} \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-137)$$

上式で表される角度中性子数密度 $n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ に中性子速度 $v(E)$ をかけることで、定常状態の角度中性子束 $f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ が固有関数展開により以下のように表されるのが分かる。

$$f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) v(E) = \sum_n \frac{S_n}{\alpha_n} \psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) v(E) \quad (4-138)$$

4.7.6.2 定常状態における検出反応に対するインポートランス

定常状態における検出反応 $v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ に対するインポートランス（随伴角度中性子数密度） $n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ は、(4-98)式で定義されるボルツマン演算子 \mathbf{B} の随伴演算子 \mathbf{B}^\dagger を用いて以下のように表される。

$$\mathbf{B}^\dagger n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E) \quad (4-139)$$

ここで、固有値方程式の随伴方程式の随伴固有関数 $\psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いて、定常状態における検出反応 $v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ に対するインポートランス $n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を以下のように展開することができると仮定する。

$$n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_n N_n^\dagger \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-140)$$

ただし N_n^\dagger は $n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ の n 次モードの展開係数である。上の展開式を(4-139)式に代入し、両辺に α 固有値方程式の固有関数 $\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ をかけて全空間・エネルギー・方向で積分し、固有関数の正規直交性を利用することで、展開係数 N_n^\dagger を以下のように得ることができる。

$$N_n^\dagger = \frac{D_n}{\alpha_n} \quad (4-141)$$

以上より、定常状態における検出反応 $v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ に対するインポートランス $n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ が固有関数展開により以下のように表されるのが分かる。

$$n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_n \frac{D_n}{\alpha_n} \psi_n^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-142)$$

ここで、核分裂反応または外部中性子源の崩壊により位置 \mathbf{r} で発生した中性子が持つ、検出反応 $v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ に対するインポートランス $n_{d,f}^\dagger(\mathbf{r})$ 、 $n_{d,s}^\dagger(\mathbf{r})$ を以下のように定義しておく。

$$n_{d,f}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_f(E)}{4\pi} n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-143)$$

$$n_{d,s}^\dagger(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-144)$$

4.7.6.3 定常状態における、核分裂反応で連鎖反応家系が二又に分岐して中性子が検出される反応に対するインポートانس

定常状態における、核分裂で連鎖反応家系が二又に分岐して中性子が検出される反応として、以下で表されるような反応を考える。

$$v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E)\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)p_f(\nu, E)\left(n_{d,f}^{\dagger}(\mathbf{r})\right)^2 \quad (4-145)$$

上式で表される反応に対するインポートانس（随伴角度中性子数密度） $n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ は、(4-98)式で定義されるボルツマン演算子 \mathbf{B} の随伴演算子 \mathbf{B}^{\dagger} を用いて以下のように表される。

$$\mathbf{B}^{\dagger} n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E)\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)p_f(\nu, E)\left(n_{d,f}^{\dagger}(\mathbf{r})\right)^2 \quad (4-146)$$

ここで、固有値方程式の随伴方程式の随伴固有関数 $\psi_n^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いて、(4-145)式で表される反応に対するインポートانس $n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を以下のように展開することができると仮定する。

$$n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_n N_{2,n}^{\dagger} \psi_n^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-147)$$

ただし $N_{2,n}^{\dagger}$ は $n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ の n 次モードの展開係数である。上の展開式を(4-146)式に代入し、両辺に α 固有値方程式の固有関数 $\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ をかけて全空間・エネルギー・方向で積分し、固有関数の正規直交性を利用することで、展開係数 $N_{2,n}^{\dagger}$ を以下のように得ることができる。

$$N_{2,n}^{\dagger} = \frac{1}{\alpha_n} \int_V d\mathbf{r} \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E)\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)p_f(\nu, E)\left(n_{d,f}^{\dagger}(\mathbf{r})\right)^2 \quad (4-148)$$

以上より、定常状態における、核分裂で連鎖反応家系が二又に分岐して中性子が検出される反応に対するインポートانس $n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ が、固有関数展開により以下のように表されるのが分かる。

$$\begin{aligned} n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) &= \sum_n \int_V d\mathbf{r} \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} v(E)\Sigma_f(\mathbf{r}, E)\psi_n(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu(\nu-1)p_f(\nu, E)\left(n_{d,f}^{\dagger}(\mathbf{r})\right)^2 \\ &\quad \times \frac{\psi_n^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})}{\alpha_n} \\ &= \sum_l \sum_m \sum_n \frac{F_{l \rightarrow mm} D_m D_n}{\alpha_l \alpha_m \alpha_n} \psi_l^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (4-149)$$

ここで、核分裂反応または外部中性子源の崩壊により位置 \mathbf{r} で発生した中性子が持つ、(4-145)式で表される反応に対するインポートانس $n_{f \rightarrow 2d,f}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $n_{f \rightarrow 2d,s}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を以下のように定義しておく。

$$n_{f \rightarrow 2d,f}^{\dagger}(\mathbf{r}) \equiv \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_f(E)}{4\pi} n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-150)$$

$$n_{f \rightarrow 2d,s}^{\dagger}(\mathbf{r}) \equiv \int_0^{\infty} dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \frac{\chi_s(E)}{4\pi} n_{f \rightarrow 2d}^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad (4-151)$$

4.7.6.4 定常状態における角度中性子束および検出反応に対するインポートانسを利用した Y 値の飽和値の理論式

上で導出された 1)定常状態における角度中性子束 $f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、2)定常状態における検出反応 $v(E)\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$ に対するインポートانس $n_d^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、3) 定常状態における、核分裂で連鎖反応家系

が二又に分岐して中性子が検出される反応に対するインポートランス $n_{f \rightarrow 2d}^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いることにより、固有関数展開を利用して導出された Y 値の飽和値 Y_∞ の理論式(4-125)を以下のように表すことができる。

$$Y_\infty = \frac{1}{C_R} \left\{ \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \Sigma_f(\mathbf{r}, E) f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^\infty \nu(\nu-1) p_f(\nu, E) \left(n_{d,f}^\dagger(\mathbf{r}) \right)^2 \right. \\ \left. + \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q(q-1) p_s(q) \left(n_{d,s}^\dagger(\mathbf{r}) \right)^2 \right\} \quad (4-152)$$

$$= \frac{1}{C_R} \left\{ \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q p_s(q) n_{f \rightarrow 2d,s}^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \right. \\ \left. + \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q(q-1) p_s(q) \left(n_{d,s}^\dagger(\mathbf{r}) \right)^2 \right\}$$

$$C_R = \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \Sigma_d(\mathbf{r}, E) f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \quad : \text{計数率} \quad (4-153)$$

$$= \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q p_s(q) n_{d,s}^\dagger(\mathbf{r})$$

従って、 $f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $n_{f \rightarrow 2d}^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を数値計算により求めることができれば、(4-152)式を用いて数値積分することで、 Y 値の飽和値 Y_∞ を求めることができる。

4.7.6.5 定常状態における角度中性子束および検出反応に対するインポートランスを利用した X 値の飽和値の理論式

Y 値の飽和値 Y_∞ の場合と同様に、 $f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $n_{f \rightarrow 2d}^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を用いることにより、固有関数展開を利用して導出された X 値の飽和値 X_∞ の理論式(4-131)、(4-132)式を以下のように表すことができる。

$$X_\infty = X_{2\infty} + X_{3\infty} \quad (4-130)$$

$$X_{2\infty} = \frac{3}{C_R} \left\{ \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \Sigma_f(\mathbf{r}, E) f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^\infty \nu(\nu-1) p_f(\nu, E) \left(n_{d,f}^\dagger(\mathbf{r}) \right) \left(n_{f \rightarrow 2d,f}^\dagger(\mathbf{r}) \right) \right. \\ \left. + \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q(q-1) p_s(q) \left(n_{d,s}^\dagger(\mathbf{r}) \right) \left(n_{f \rightarrow 2d,s}^\dagger(\mathbf{r}) \right) \right\} \quad (4-154)$$

$$X_{3\infty} = \frac{1}{C_R} \left\{ \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dE \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega} \Sigma_f(\mathbf{r}, E) f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \sum_{\nu=0}^\infty \nu(\nu-1)(\nu-2) p_f(\nu, E) \left(n_{d,f}^\dagger(\mathbf{r}) \right)^3 \right. \\ \left. + \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}) \sum_{q=0}^\infty q(q-1)(q-2) p_s(q) \left(n_{d,s}^\dagger(\mathbf{r}) \right)^3 \right\} \quad (4-155)$$

従って、 $f(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $n_d^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ 、 $n_{f \rightarrow 2d}^\dagger(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega})$ を数値計算により求めることができれば、(4-154)、(4-155)式を用いて数値積分することで、 X 値の飽和値 X_∞ を求めることができる。

4.8 本章のまとめ

本章で得られた結果、結論を以下に示す。

- 1) 空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた中性子検出確率のバランス方程式に基づいて、二次相関量 Y 値および三次相関量 X 値の一般理論を導出した。
- 2) 導出された Y 、 X 値の一般理論は、中性子検出数の随伴輸送方程式により記述されるので、数値計算を利用することで、決定論的手法により Y 、 X 値の数値計算が可能であることが分かった。
- 3) 導出された Y 、 X 値の一般理論において、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ とすることで、 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の一般理論を導出した。
- 4) Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の一般理論は、定常状態における中性子検出数の階乗モーメントの随伴輸送方程式により記述されるため、即発中性子と遅発中性子を区別する必要がないことが分かった。
- 5) 固有関数展開を用いて Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の一般理論を解くことにより、第3章の物理的直感法で得られた Y_∞ 、 X_∞ の理論式と、全く同じ結果を得ることができた。
- 6) さらに固有関数展開を用いて得られた Y_∞ 、 X_∞ の理論式の見方を変えることで、 Y_∞ 、 X_∞ の理論式が定常状態の定常状態における角度中性子束および検出反応に対するインポートランスにより表されることが分かった。

Chapter 5

数値計算を利用した三次中性子相関法の検証

5.1 本章の目的・概要

第3章、第4章において、データ数の有限性や、空間依存性を考慮に入れた二次相関量 Y 値、三次相関量 X 値の理論式を新たに導出した。本章では数値計算を利用して、 Y 、 X 値に現れるデータ数の有限性や空間依存性の効果について検証を行う。さらに、データ数の有限性や空間依存性の効果が、三次中性子相関法により得られた未臨界度にどのような影響を及ぼすか検討を行う。

まずは、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムを用いて、データ数の有限性の効果について検証を行う。その結果、不偏分散および不偏三次モーメントを用いて Y 、 X 値を評価することにより、 Y 、 X 値に現れるデータ数の有限性の効果をほとんど排除できることが示される。また不偏分散および不偏三次モーメントを用いて Y 、 X 値を評価すれば、データ数を無限とした従来の Y 、 X 値の理論式を用いて解析を行ったとしても、三次中性子相関法により未臨界度を十分に評価できることが示される。

次に、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラム、および自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを用いて、空間依存性の効果についての検証を行う。その結果、従来の1点炉近似による三次中性子相関法を用いた場合、未臨界度を正しく評価できないことが分かる。また本研究で新たに提案した、基本モード近似による三次中性子相関法を用いた場合、 Y 、 X 値の空間基本モード成分と高次モード成分の比から計算される補正因子を利用することで、未臨界度をより正しく評価できることが分かる。

5.2 データ数の有限性の効果の検証

ここでは、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムを用いて、第3章で述べた二次相関量 Y 値および三次相関量 X 値に現れるデータ数の有限性の効果について検証する^[11,26,27]。 Y 、 X 値に現れるデータ数の有限性の効果のみを純粹に議論したいので、以下で述べるように、非常に単純な計算条件（1点炉・エネルギー1群・遅発中性子無視）で検証を行うことにする。

さらにシミュレーションにより得られた Y 、 X 値を解析することで、データ数の有限性の効果が、三次中性子相関法により得られた未臨界度にどのような影響を及ぼすか検討を行う。

5.2.1 計算条件

自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムの計算条件を以下に示す。

- 1) 無限・均質体系、すなわち1点炉に相当する。
- 2) 中性子のエネルギー1群。
- 3) 遅発中性子無視、すなわち核分裂で発生した中性子は全て即発中性子とみなした。
- 4) 体系内の核分裂反応として²³⁵Uによる核分裂反応を想定した。その際、1核分裂反応当りに発生する中性子数 ν の確率分布 $p_f(\nu)$ は、以下で表される二項分布に従うとした。

$$p_f(\nu) = \frac{\nu_{\max}!}{\nu!(\nu_{\max}-\nu)!} \left(\frac{\langle\nu\rangle}{\nu_{\max}}\right)^\nu \left(1 - \frac{\langle\nu\rangle}{\nu_{\max}}\right)^{\nu_{\max}-\nu} \quad (5-1)$$

ただし $\langle\nu\rangle$ は核分裂により発生する平均中性子数、 ν_{\max} は核分裂により発生する最大中性子数を表す。上式を用いて計算される平均 $\langle\nu\rangle$ および二次階乗モーメント $\langle\nu(\nu-1)\rangle$ が文献値^[10]になるべく近くなるように、二項分布のパラメーター $\langle\nu\rangle$ 、 ν_{\max} を $\langle\nu\rangle=2.474$ 、 $\nu_{\max}=5$ とした。ここで、核分裂で発生する中性子数の二次階乗モーメント $\langle\nu(\nu-1)\rangle$ 、三次階乗モーメント $\langle\nu(\nu-1)(\nu-2)\rangle$ の値は以下のように求められる。

$$\langle\nu(\nu-1)\rangle = \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} \nu(\nu-1)p_f(\nu) = \langle\nu\rangle^2 \left(1 - \frac{1}{\nu_{\max}}\right) \cong 4.897 \quad (5-2)$$

$$\langle\nu(\nu-1)(\nu-2)\rangle = \sum_{\nu=0}^{\nu_{\max}} \nu(\nu-1)(\nu-2)p_f(\nu) = \langle\nu\rangle^3 \left(1 - \frac{1}{\nu_{\max}}\right) \left(1 - \frac{2}{\nu_{\max}}\right) \cong 7.268 \quad (5-3)$$

- 5) 外部中性子源として線源強度 $S = 10000$ [1/s]の²⁵²Cf自発核分裂中性子源を想定した。その際、1崩壊当りに発生する中性子数 q の確率分布 $p_s(q)$ は、以下で表される二項分布に従うとした。

$$p_s(q) = \frac{q_{\max}!}{q!(q_{\max}-q)!} \left(\frac{\langle q \rangle}{q_{\max}}\right)^q \left(1 - \frac{\langle q \rangle}{q_{\max}}\right)^{q_{\max}-q} \quad (5-4)$$

ただし $\langle q \rangle$ は外部中性子源の崩壊により発生する平均中性子数、 q_{\max} は外部中性子源の崩壊により発生する最大中性子数を表す。上式を用いて計算される平均 $\langle q \rangle$ および二次階乗モーメント $\langle q(q-1)\rangle$ が文献値^[10]になるべく近くなるように、二項分布のパラメーター $\langle q \rangle$ 、 q_{\max} を $\langle q \rangle=3.876$ 、 $q_{\max}=7$ とした。ここで、外部中性子源の崩壊により発生する中性子数の二次階乗モーメント $\langle q(q-1)\rangle$ 、三次階乗モーメント $\langle q(q-1)(q-2)\rangle$ は以下のように求められる。

$$\langle q(q-1)\rangle = \sum_{q=0}^{q_{\max}} q(q-1)p_s(q) = \langle q \rangle^2 \left(1 - \frac{1}{q_{\max}}\right) \cong 12.877 \quad (5-5)$$

$$\langle q(q-1)(q-2)\rangle = \sum_{q=0}^{q_{\max}} q(q-1)(q-2)p_s(q) = \langle q \rangle^3 \left(1 - \frac{1}{q_{\max}}\right) \left(1 - \frac{2}{q_{\max}}\right) \cong 35.651 \quad (5-6)$$

- 6) 中性子の検出として捕獲反応を利用し、捕獲された中性子は全て検出されたとみなした。ただし、巨視的捕獲断面積 Σ_c は検出反応による捕獲を含んでいないことに注意しなければならない。従って、 Σ_c と巨視的検出反断面積 Σ_d の和 $\Sigma_c + \Sigma_d$ が全捕獲反応断面積に相当する。ここで検出効率 ε を以下のように定義する。

$$\varepsilon = \frac{\Sigma_d}{\Sigma_c + \Sigma_d} \quad (5-7)$$

今回の計算条件では、捕獲された中性子が全て検出されるので $\varepsilon=1$ である。

- 7) 未臨界体系として、無限増倍率 $k_{\infty} = 0.99, 0.95, 0.90, 0.80$ となる 4 つの未臨界体系 1~4 を考えた。これら 4 つの未臨界体系の 1 群定数を Table 5-1 に示す。ただし Table 5-1 において、 v は中性子速度、 Σ_s は巨視的散乱断面積、 Σ_f は巨視的核分裂断面積をそれぞれ表す。ここで k_{∞} の真値は以下の式で求められる。

$$k_{\infty} = \frac{\langle v \rangle \Sigma_f}{\Sigma_c + \Sigma_d + \Sigma_f} \quad (5-8)$$

上式を用いて k_{∞} が 0.99、0.95、0.90、0.80 がとなるように、Table 5-1 における 1 群定数 $\Sigma_c + \Sigma_d$ を調整した (検出効率 $\varepsilon = 1$ なので、実際には巨視的検出反応断面積のみを調整した)。同様に、未臨界度 $(-\rho)$ および中性子減衰定数 α の真値は以下のように求められる。

$$(-\rho) \equiv \frac{1 - k_{\infty}}{k_{\infty}} = \frac{\Sigma_c + \Sigma_d + \Sigma_f}{\langle v \rangle \Sigma_f} - 1 \quad (5-9)$$

$$\alpha = v \langle v \rangle \Sigma_f (-\rho) = v (\Sigma_c + \Sigma_d + \Sigma_f - \langle v \rangle \Sigma_f) \quad (5-10)$$

各未臨界体系 1~4 に対する k_{∞} 、 $(-\rho)$ 、 α の真値を Table 5-2 に示す。

Table 5-1 各未臨界体系における 1 群定数 (無限・均質体系)

未臨界体系	v [cm/s]	Σ_s [1/cm]	Σ_c [1/cm]	Σ_d [1/cm]	Σ_f [1/cm]
1	1.39521×10^6	9.39369×10^{-1}	0	2.29344×10^{-2}	1.52999×10^{-2}
2	1.39521×10^6	9.39369×10^{-1}	0	2.45443×10^{-2}	1.52999×10^{-2}
3	1.39521×10^6	9.39369×10^{-1}	0	2.67578×10^{-2}	1.52999×10^{-2}
4	1.39521×10^6	9.39369×10^{-1}	0	3.20150×10^{-2}	1.52999×10^{-2}

Table 5-2 各未臨界体系に対する k_{∞} 、 $(-\rho)$ 、 α の真値

未臨界体系	k_{∞} [-]	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]	α [1/s]
1	0.9900	1.01	533.5
2	0.9500	5.26	2780
3	0.9000	11.11	5868
4	0.8000	25.00	13203

- 8) 定常状態の未臨界体系に対して Y 、 X 値の解析を行う必要があるため、外部中性子源が崩壊し始めてから体系内の中性子数密度が定常状態に達するまでのデータは解析から除かなければならない。ここで体系内の中性子数密度が定常状態に達するまでの削除時間を t_{cut} とする。連鎖反応系は中性子減衰定数 α で指数関数的に減衰するので、削除時間 t_{cut} としてはその未臨界体系の α の逆数の数倍程度とれば十分だと考えられる。削除時間 t_{cut} だけ除いた後に測定時間 t_{measure} の間だけ中性子検出時刻の時系列データの収集を行い、この一連の計算を 1sweep と

する。この sweep 数を増やすことにより Y 、 X 値の統計精度を上げる。各未臨界体系における t_{cut} 、 t_{measure} 、sweep 数の設定値を Table 5-3 に示す。Table 5-3 において、各未臨界体系に対する全測定時間 $(t_{\text{cut}} + t_{\text{measure}}) \times \text{sweep}$ 数を 4080 [s] (約 1 時間) と一定にした。

Table 5-3 各未臨界体系における t_{cut} 、 t_{measure} 、sweep 数の設定値 (無限・均質体系)

未臨界体系	t_{cut} [s]	t_{measure} [s]	sweep 数
1	0.02	1.00	4000
2	0.004	0.200	20000
3	0.002	0.100	40000
4	0.0008	0.0400	100000

- 9) 時系列データの処理としてはバンチング法を用いた。その際、測定時間 t_{measure} の間の中性子検出時刻の時系列データに対して、基本ゲート数 N_0 が 4000 (基本ゲート幅 T_0 は $t_{\text{measure}}/4000$) の MCS を想定し処理を行った。1sweep ごとに中性子検出数の平均 m 、分散 v 、3 次モーメント s を推定した。ただし各 i 番目の sweep で推定された平均、分散、3 次モーメントを、それぞれ m_i 、 v_i 、 s_i とする。得られた m_i 、 v_i 、 s_i から、全 sweep に対してこれらの平均 \bar{m}_i 、 \bar{v}_i 、 \bar{s}_i を求めることにより、最終的に以下のように Y 、 X 値を評価した。

$$\hat{Y} = \frac{\bar{v}_i}{\bar{m}_i} - 1 \quad (5-11)$$

$$\hat{X} = \frac{\bar{s}_i}{\bar{m}_i} - 3 \frac{\bar{v}_i}{\bar{m}_i} + 2 \quad (5-12)$$

5.2.2 無限・均質体系、エネルギー1群、遅発中性子を無視した場合の

Y 、 X 値の理論式

上で述べた計算条件 (無限・均質体系、エネルギー1群、遅発中性子を無視) の場合、二次相関量 Y 値および三次相関量 X 値の理論式を、以下のように厳密に導出することができる。ただし、第3章で導出したように 1) データ数が無限の場合と 2) データ数が有限の場合で、 Y 、 X 値の理論式が異なることに注意しなければならない。

5.2.2.1 データ数が無限の場合 (真値)

ここでは仮にデータ数が無限にあったとして、分散 v および三次モーメント s の真値を推定することができる場合、すなわち Y 、 X 値の真値を推定できる場合について考える。このとき、 Y 、 X 値の真値について、無限・均質体系、エネルギー1群、遅発中性子を無視した場合の理論式を以下のように導出することができる。

a) 二次相関量 Y 値の真値

$$Y(T) = Y_{\infty} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \quad (5-13)$$

$$Y_{\infty} = \frac{\Sigma_d \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\Sigma_f \langle \nu \rangle^2} \frac{1 + \delta_2(-\rho)}{(-\rho)^2} \quad (Y \text{ 値の飽和値}) \quad (5-14)$$

$$\delta_2 \equiv \frac{\langle \nu \rangle \langle q(q-1) \rangle}{\langle q \rangle \langle \nu(\nu-1) \rangle} \quad (5-15)$$

b) 三次相関量 X 値の真値

$$X(T) = X_2(T) + X_3(T) \quad (5-16)$$

$$X_2(T) = X_{2\infty} \left(1 + e^{-\alpha T} - 2 \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \quad (5-17)$$

$$X_{2\infty} = 3 \left(\frac{\Sigma_d \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\Sigma_f \langle \nu \rangle^2} \right)^2 \frac{1 + \delta_2(-\rho)}{(-\rho)^4} \quad (X \text{ 値二又成分の飽和値}) \quad (5-18)$$

$$X_3(T) = X_{3\infty} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha T} + e^{-2\alpha T}}{2\alpha T} \right) \quad (5-19)$$

$$X_{3\infty} = \left(\frac{\Sigma_d}{\Sigma_f} \right)^2 \frac{\langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle}{\langle \nu \rangle^3} \frac{1 + \delta_3(-\rho)}{(-\rho)^3} \quad (X \text{ 値三又成分の飽和値}) \quad (5-20)$$

$$\delta_3 \equiv \frac{\langle \nu \rangle \langle q(q-1)(q-2) \rangle}{\langle q \rangle \langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle} \quad (5-21)$$

5.2.2.2 データ数が有限の場合

実際には有限のデータから分散 ν および三次モーメント s を推定するため、第3章で述べたように、 Y 、 X 値にはデータ数の有限性の効果が表れる。分散 ν および三次モーメント s を推定する際に1)標本分散 ν_s 、標本三次モーメント s_s を用いるか、あるいは2)不偏分散 ν_U 、不偏三次モーメント s_U を用いるかによって、無限・均質体系、エネルギー1群、遅発中性子を無視した場合における、 Y 、 X 値の期待値の理論式を以下のように導出することができる。

1) 標本分散、標本三次モーメントを用いた場合

1-a) 標本分散を用いた場合の二次相関量 Y 値の期待値

$$\langle Y_s(T) \rangle = Y_{\infty} f_{Y_s}(\alpha T, N) - \frac{1}{N} \quad (5-22)$$

$$f_{Y_s}(x, y) \equiv 1 - \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{1}{y} \left(1 - \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \right) \quad (5-23)$$

1-b) 標本分散、標本三次モーメントを用いた場合の三次相関量 X 値の期待値

$$\langle X_s(T) \rangle = X_{2\infty} f_{X_s,2}(\alpha T, N) + X_{3\infty} f_{X_s,3}(\alpha T, N) - \frac{6}{N} Y_{\infty} f_{Y_s}(\alpha T, N) + \frac{2}{N^2} \quad (5-24)$$

$$f_{X_{S,2}}(x, y) \equiv 1 + e^{-x} - 2 \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{1}{y} \left\{ 3 + e^{-x} - 4 \frac{1 - e^{-x}}{x} - 2 \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \left(1 - \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) \right\} \\ + \frac{2}{y^2} \left(1 + e^{-xy} - 2 \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \right) \quad (5-25)$$

$$f_{X_{S,3}}(x, y) \equiv 1 - \frac{3 - 4e^{-x} + e^{-2x}}{2x} - \frac{1}{y} \left[3 - 3 \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{(1 - e^{-x})(1 - e^{-xy})}{xy} \left\{ 1 + \frac{1 + e^{-xy}}{2(1 + e^{-x})} \right\} \right] \\ + \frac{2}{y^2} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-xy} + e^{-2xy}}{2xy} \right) \quad (5-26)$$

2) 不偏分散、不偏三次モーメントを用いた場合

2-a) 不偏分散を用いた場合の二次相関量 Y 値の期待値

$$\langle Y_U(T) \rangle = Y_\infty f_{Y_U}(\alpha T, N) \quad (5-27)$$

$$f_{Y_U}(x, y) \equiv \frac{y}{y-1} \left(1 - \frac{1 - e^{-x}}{x} \right) - \frac{1}{y-1} \left(1 - \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \right) \quad (5-28)$$

2-b) 不偏分散、不偏三次モーメントを用いた場合の三次相関量 X 値の期待値

$$\langle X_U(T) \rangle = X_{2\infty,0} f_{X_{U,2}}(\alpha_0 T, N) + X_{3\infty,0} f_{X_{U,3}}(\alpha_0 T, N) \quad (5-29)$$

$$f_{X_{U,2}}(x, y) \equiv \frac{y^2}{(y-1)(y-2)} \left(1 + e^{-x} - 2 \frac{1 - e^{-x}}{x} \right) \\ - \frac{y}{(y-1)(y-2)} \left\{ 3 + e^{-x} - 4 \frac{1 - e^{-x}}{x} - 2 \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \left(1 - \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) \right\} \\ + \frac{2}{(y-1)(y-2)} \left(1 + e^{-xy} - 2 \frac{1 - e^{-xy}}{xy} \right) \quad (5-30)$$

$$f_{X_{U,3}}(x, y) \equiv \frac{y^2}{(y-1)(y-2)} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-x} + e^{-2x}}{2x} \right) \\ - \frac{y}{(y-1)(y-2)} \left[3 - 3 \frac{1 - e^{-x}}{x} - \frac{(1 - e^{-x})(1 - e^{-xy})}{xy} \left\{ 1 + \frac{1 + e^{-xy}}{2(1 + e^{-x})} \right\} \right] \\ + \frac{2}{(y-1)(y-2)} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-xy} + e^{-2xy}}{2xy} \right) \quad (5-31)$$

5.2.3 無限・均質体系、エネルギー1群の場合の三次中性子相関法の解析公式

上で導出された Y 、 X 値に理論式を利用することで、無限・均質体系、エネルギー1群の場合の三次中性子相関法の解析公式を、以下のように導出することができる。

$$\frac{X_\infty}{Y_\infty^2} = \frac{X_{2\infty} + X_{3\infty}}{Y_\infty^2} = \frac{3}{1 + \delta_2(-\rho)} + F \frac{\{1 + \delta_3(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_2(-\rho)\}^2} \quad (5-32)$$

$$F \equiv \frac{\langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle \langle \nu \rangle}{\langle \nu(\nu-1) \rangle^2} \quad (5-33)$$

ただし、今回の計算条件の場合、上で現れた定数 δ_2 、 δ_3 、 F は以下のように計算される。

$$\delta_2 \cong 1.679 \quad (5-34)$$

$$\delta_3 \cong 3.131 \quad (5-35)$$

$$F \cong 0.7500 \quad (5-36)$$

検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ を正しく評価することができれば、(5-32)式を用いて未臨界度($-\rho$)の絶対値を評価することができる。

5.2.4 モンテカルロシミュレーション計算結果

5.2.1 で述べた計算条件を用いて、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムによる数値計算を行った。

まずは、 Y 、 X 値を評価する際に 1) 標本分散、標本三次モーメントを用いた場合 (すなわち Y_S 、 X_S 値)、あるいは 2) 不偏分散、不偏三次モーメントを用いた場合 (すなわち Y_U 、 X_U 値) について、シミュレーションにより得られた Y 、 X 値の計算結果を示す。

次に、シミュレーションにより得られた Y 、 X 値に対して、1) データ数を無限とした従来の理論式、または 2) データ数の有限性を考慮に入れた理論式を用いて解析を行い、三次中性子相関法により得られた未臨界度の評価結果を示す。

5.2.4.1 標本分散、標本三次モーメントを用いた場合の Y 、 X 値のモンテカルロシミュレーション計算結果

各未臨界体系 1~4 に対して、標本分散 v_S および標本三次モーメント s_S を用いて評価された Y 、 X 値 (すなわち Y_S 、 X_S 値) のモンテカルロシミュレーション結果を Fig. 5-1 から Fig. 5-8 にそれぞれ示す。またデータ数 N を無限とした場合の Y 、 X 値の真値 ((5-13)、(5-16)式)、およびデータ数の有限性を考慮に入れた Y_S 、 X_S 値の期待値に対する理論値 ((5-22)、(5-24)式) も、Fig. 5-1 から Fig. 5-8 にあわせて示す。

これらの Fig. 5-1 から Fig. 5-8 より、標本分散 v_S および標本三次モーメント s_S を用いて評価された Y_S 、 X_S 値は、データ数の有限性の効果により、真値に比べて明らかに過小評価であることが分かる。バンチング処理を用いることで検出時間幅 T が大きくなるにつれデータ数 N が減少するため、 Y_S 、 X_S 値は検出時間幅 T が大きくなっても飽和せずに落ち込んでしまうことが分かる。特に、 X_S 値に現れる落ち込みの効果は非常に大きい。従って、標本分散 v_S および標本三次モーメント s_S を用いて Y 、 X 値を評価した場合には、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ を正しく推定できないと考えられる。

ただし、モンテカルロシミュレーションで得られた Y_S 、 X_S 値と、データ数の有限性を考慮に入れた Y_S 、 X_S 値の期待値に対する理論値は、誤差の範囲内で良く一致している。従って、データ数の有限性の効果を考慮に入れた理論式 ((5-22)、(5-24)式) を用いて Y_S 、 X_S 値を解析すれば、 Y_∞ 、 X_∞ を正しく推定できる可能性がある。

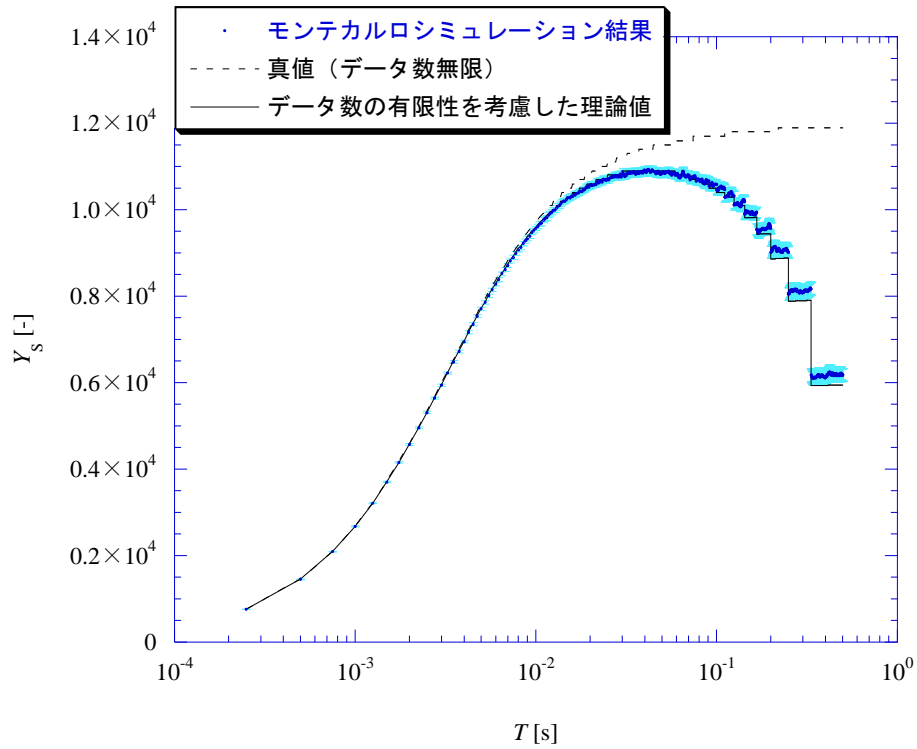


Fig. 5-1 未臨界体系 1 における Y_s 値のモンテカルロシミュレーション結果

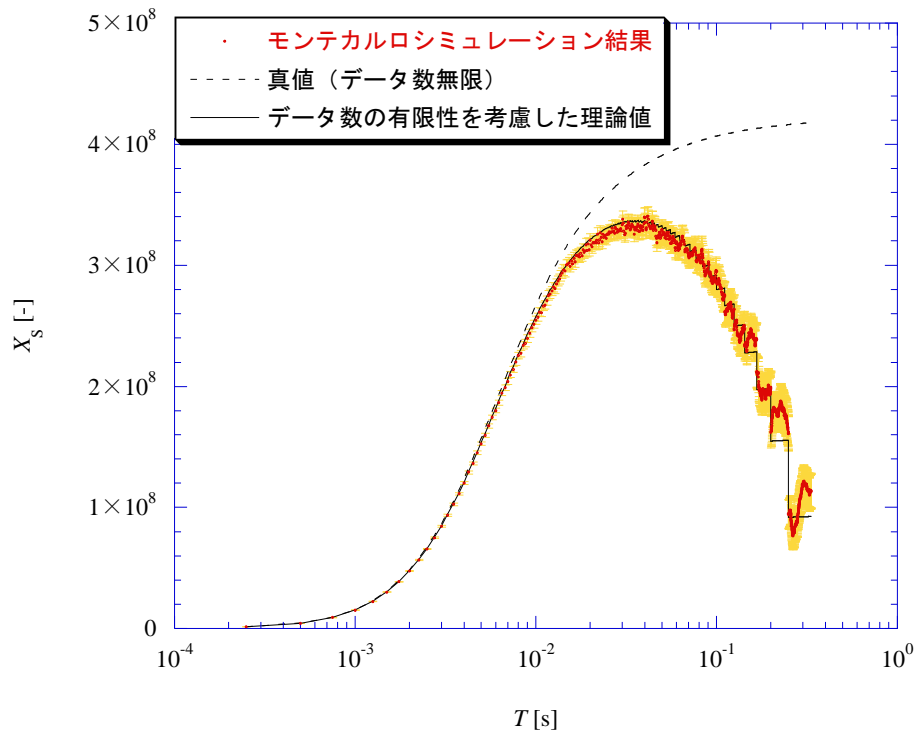


Fig. 5-2 未臨界体系 1 における X_s 値のモンテカルロシミュレーション結果

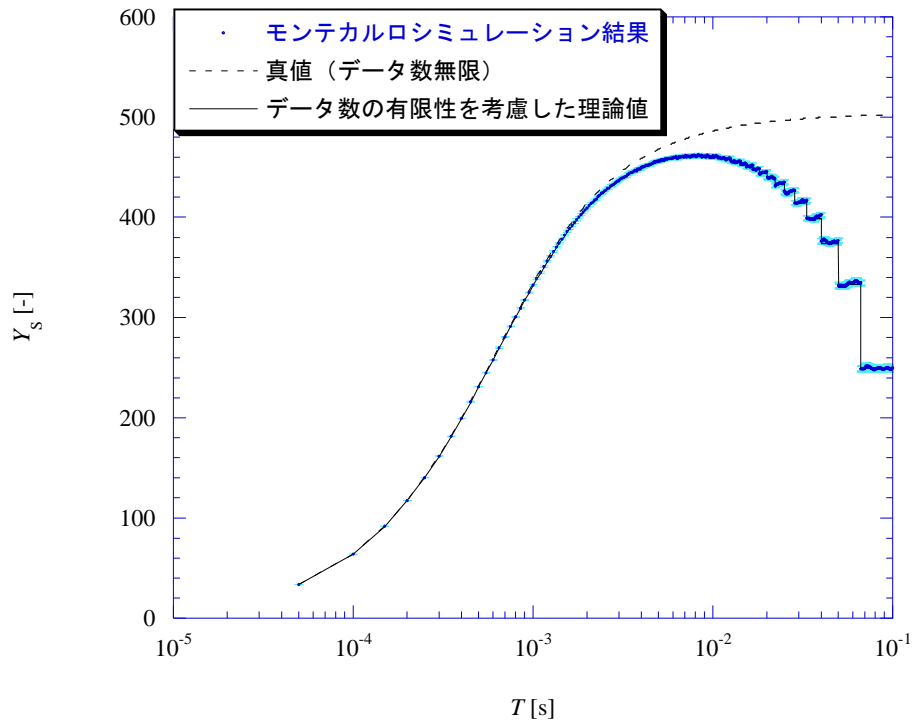


Fig. 5-3 未臨界体系 2 における Y_s 値のモンテカルロシミュレーション結果

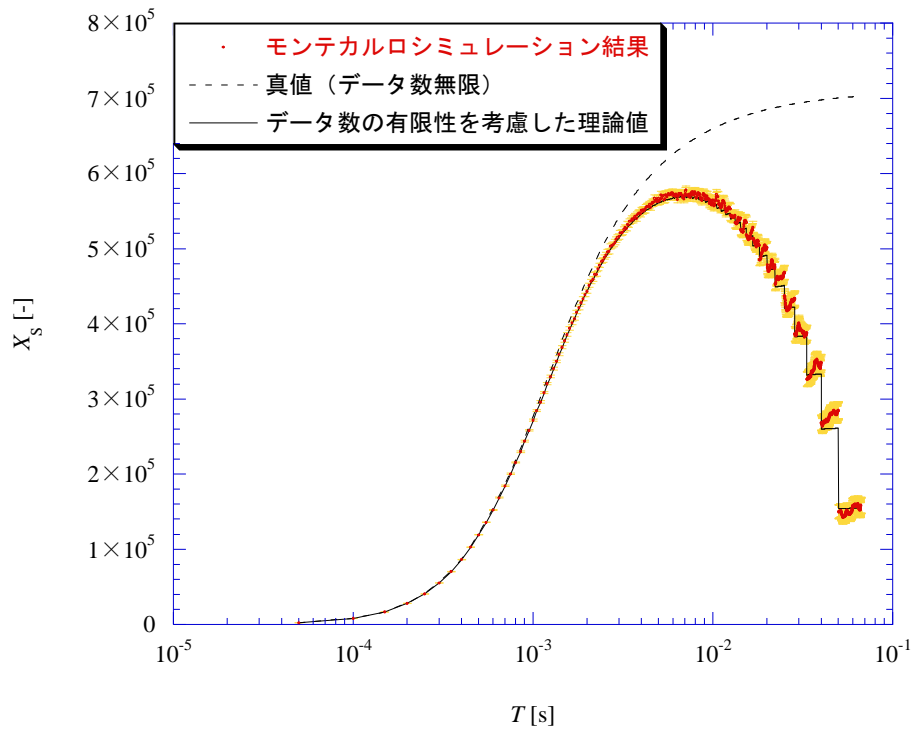


Fig. 5-4 未臨界体系 2 における X_s 値のモンテカルロシミュレーション結果

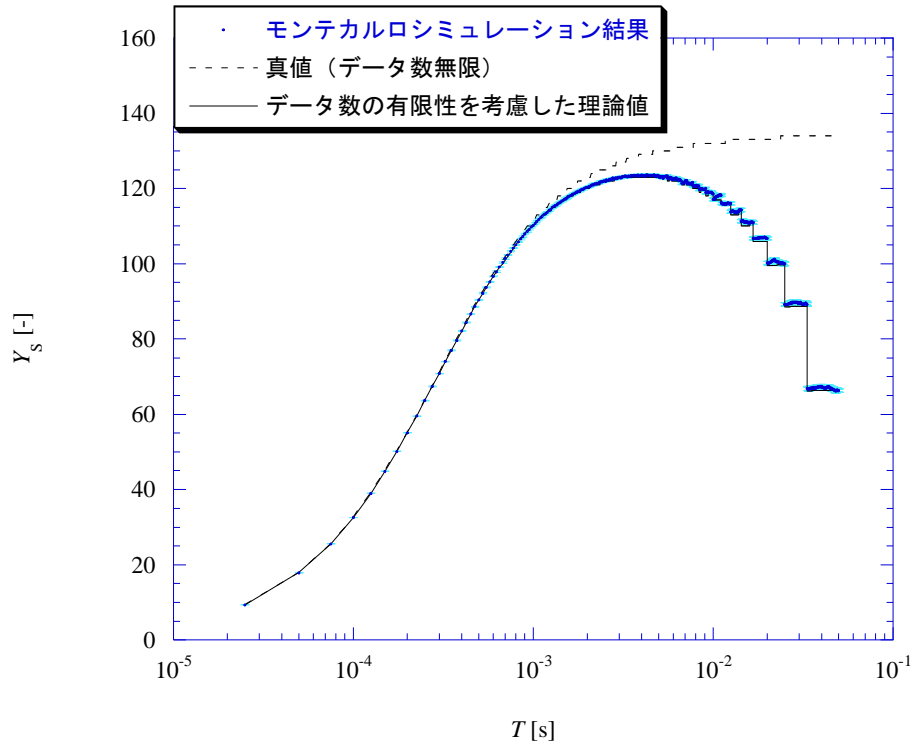


Fig. 5-5 未臨界体系 3 における Y_s 値のモンテカルロシミュレーション結果

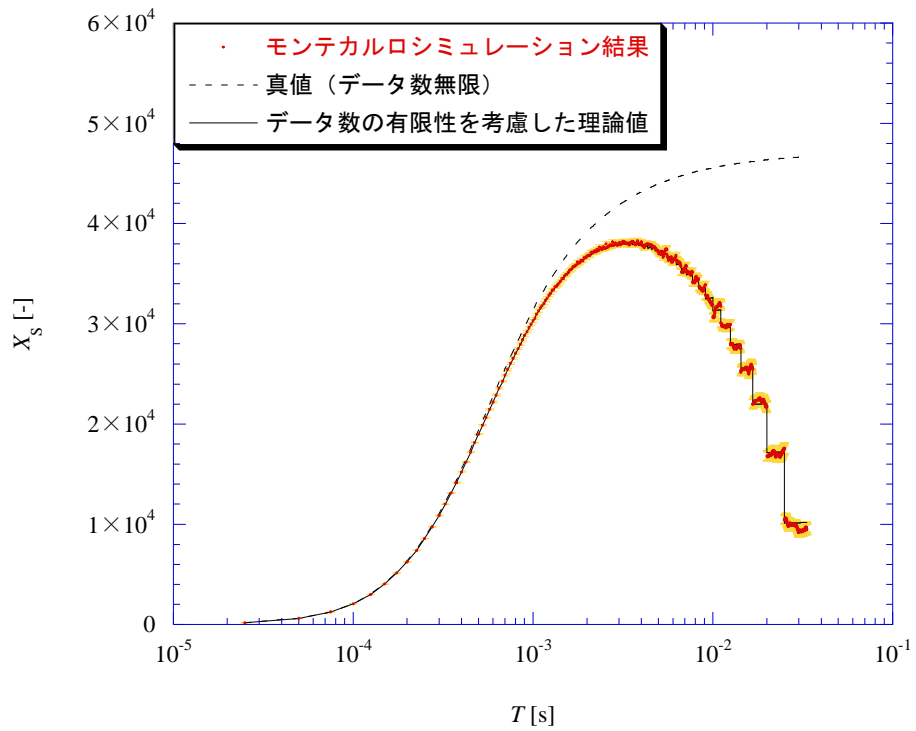


Fig. 5-6 未臨界体系 3 における X_s 値のモンテカルロシミュレーション結果

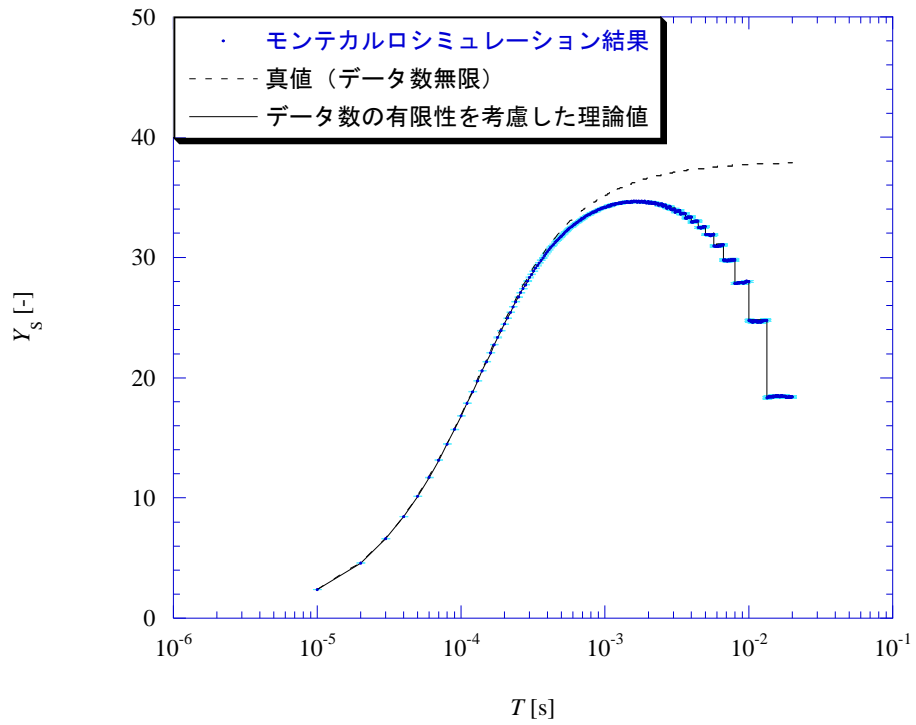


Fig. 5-7 未臨界体系 4 における Y_s 値のモンテカルロシミュレーション結果

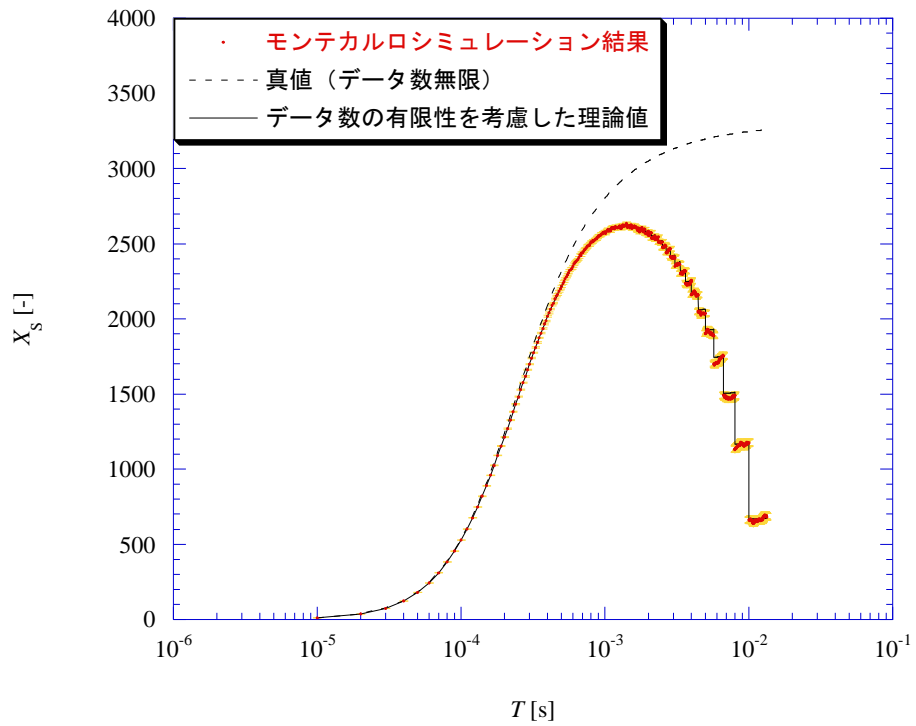


Fig. 5-8 未臨界体系 4 における X_s 値のモンテカルロシミュレーション結果

5.2.4.2 不偏分散、不偏三次モーメントを用いた場合の Y 、 X 値のモンテカルロシミュレーション計算結果

各未臨界体系 1~4 に対して、不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いて評価された Y 、 X 値 (すなわち Y_U 、 X_U 値) のモンテカルロシミュレーション結果を Fig. 5-9 から Fig. 5-16 にそれぞれ示す。またデータ数 N を無限とした場合の Y 、 X 値の真値 ((5-13)、(5-16)式)、およびデータ数の有限性を考慮に入れた Y_U 、 X_U 値の期待値に対する理論値 ((5-27)、(5-29)式) も、Fig. 5-9 から Fig. 5-16 にあわせて示す。

これらの Fig. 5-9 から Fig. 5-16 より、不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いることで、標本分散 v_S および標本三次モーメント s_S を用いた場合に比べて (Fig. 5-1 から Fig. 5-8)、データ数の有限性の効果を大幅に軽減できたことが分かる。標本分散 v_S および標本三次モーメント s_S を用いた場合は検出時間幅 T が大きくなるにつれて得られた Y_S 、 X_S 値が落ち込んだが、不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いた Y_U 、 X_U 値は検出時間幅 T が大きくなるにつれて飽和する。

また、データ数 N を無限とした場合の Y 、 X 値の真値 ((5-13)、(5-16)式) と、データ数の有限性を考慮に入れた Y_U 、 X_U 値の期待値の理論値 ((5-27)、(5-29)式) がほとんど同じであることが分かる。そのため、モンテカルロシミュレーションで得られた Y_U 、 X_U 値は、データ数の有限性を考慮に入れた Y_U 、 X_U 値の期待値の理論値 ((5-27)、(5-29)式) だけでなく、データ数 N を無限とした場合の Y 、 X 値の真値 ((5-13)、(5-16)式) と誤差の範囲内で良く一致している。

以上より、不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いて Y 、 X 値を評価した場合には、データ数の有限性の効果をほとんど排除することができると考えられる。さらに得られた Y_U 、 X_U 値を解析する際に、データ数の有限性の効果を考慮に入れた理論式 ((5-27)、(5-29)式) を用いるまでもなく、データ数 N を無限とした従来の Y 、 X 値の理論式 ((5-13)、(5-16)式) で十分であると予想できる。

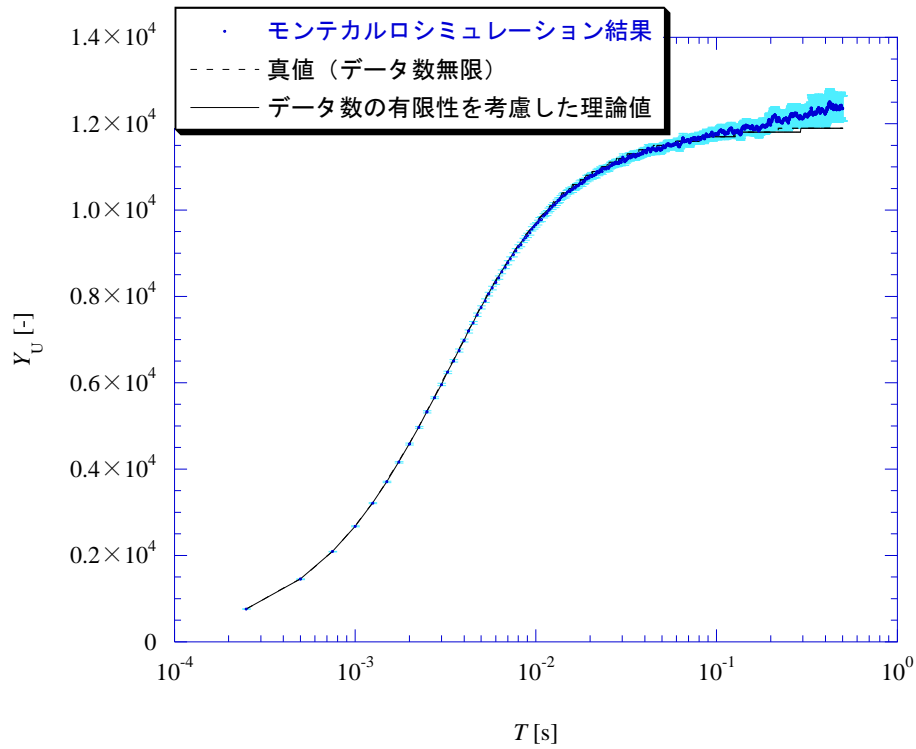


Fig. 5-9 未臨界体系 1 における Y_U 値のモンテカルロシミュレーション結果

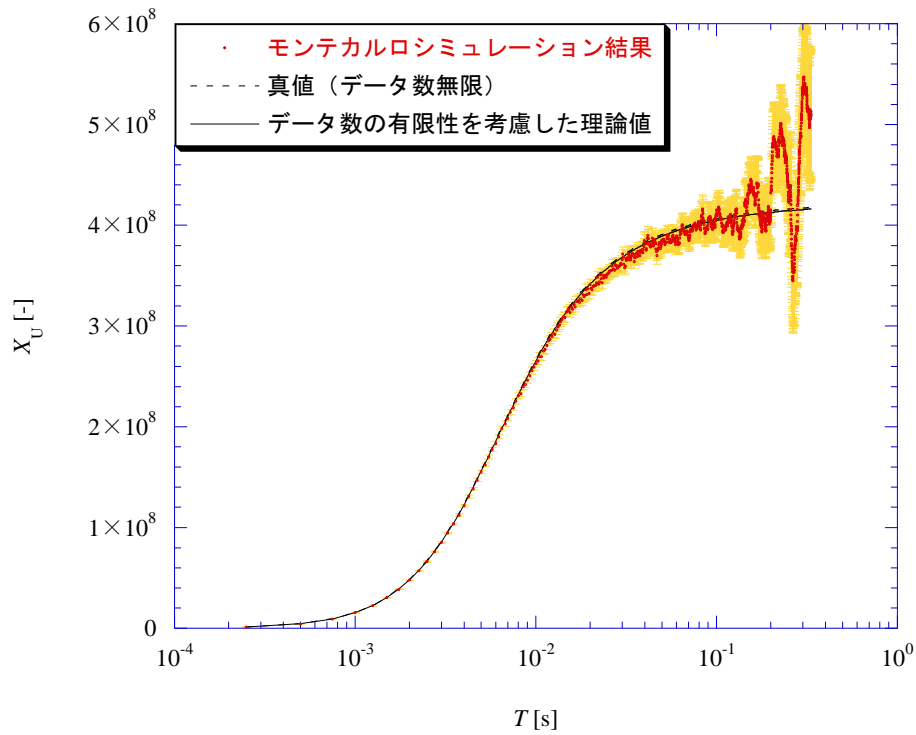


Fig. 5-10 未臨界体系 1 における X_U 値のモンテカルロシミュレーション結果

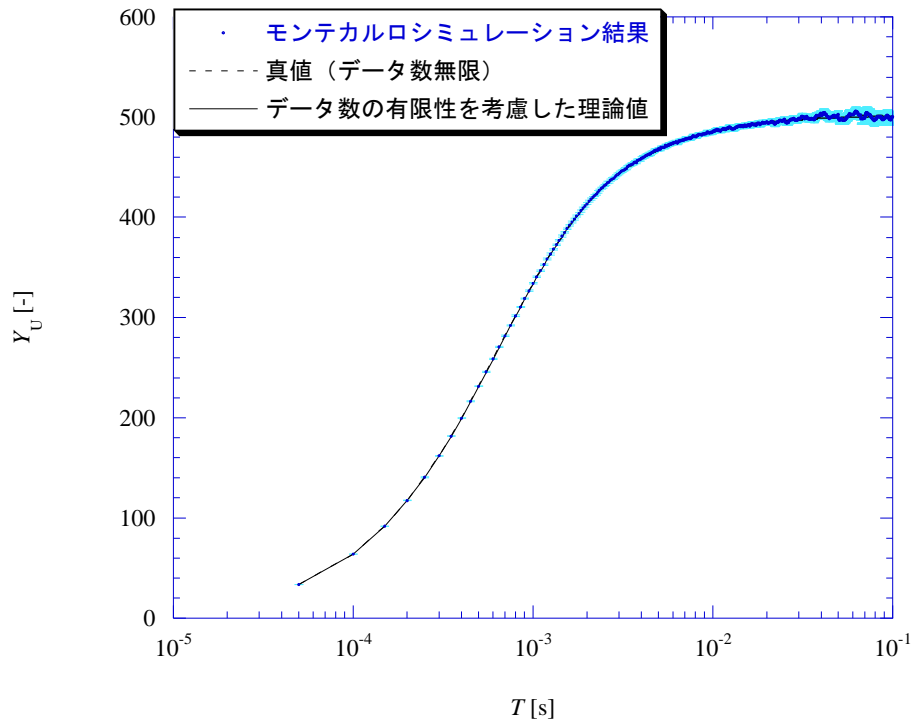


Fig. 5-11 未臨界体系 2 における Y_U 値のモンテカルロシミュレーション結果

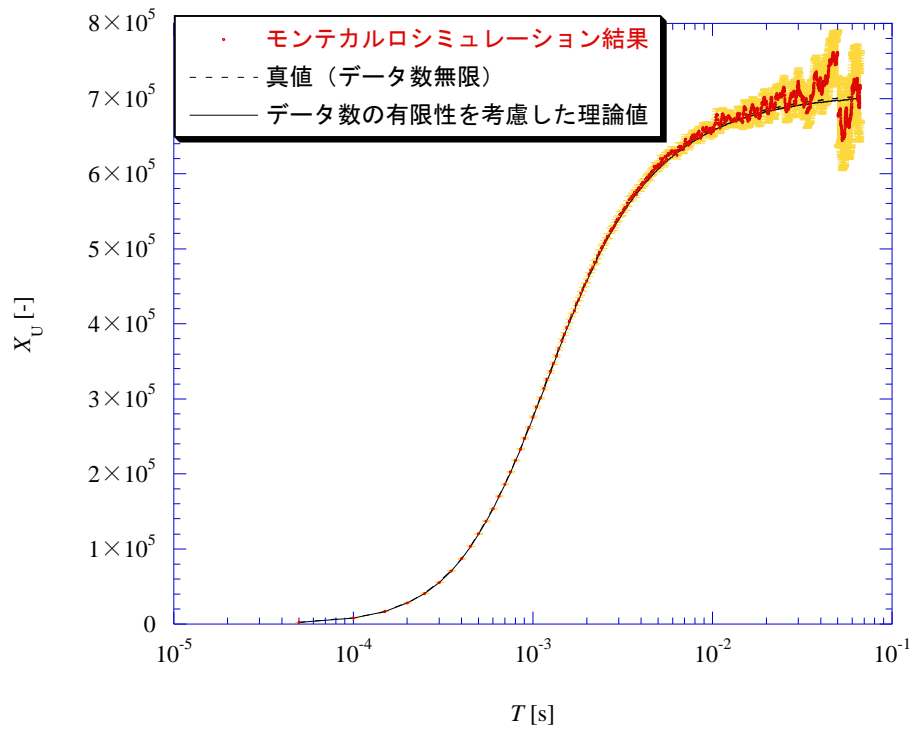


Fig. 5-12 未臨界体系 2 における X_U 値のモンテカルロシミュレーション結果

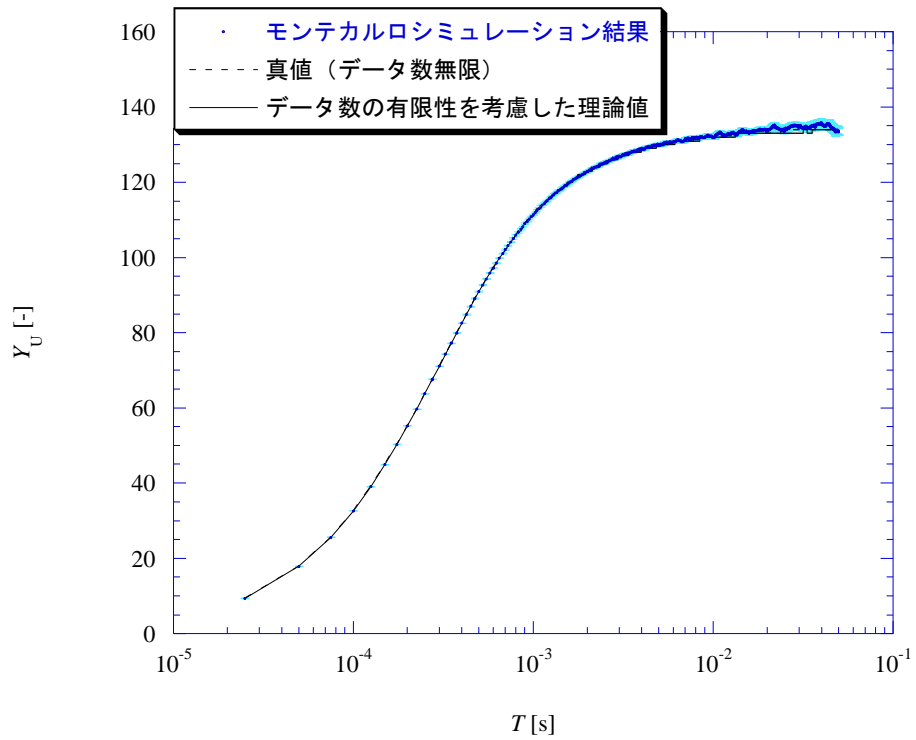


Fig. 5-13 未臨界体系 3 における X_U 値のモンテカルロシミュレーション結果

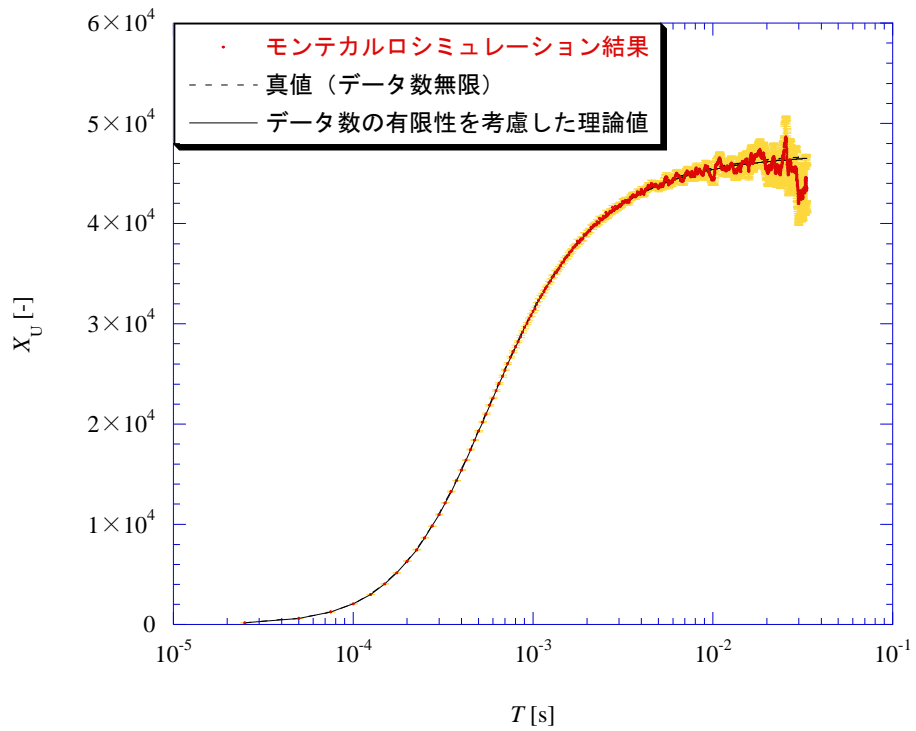


Fig. 5-14 未臨界体系 3 における X_U 値のモンテカルロシミュレーション結果

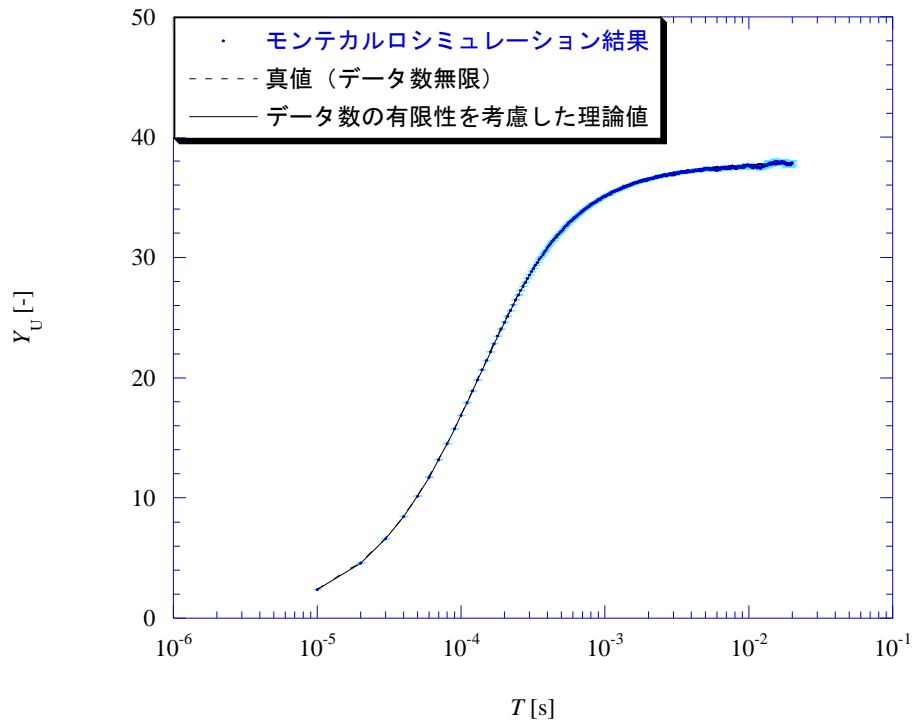


Fig. 5-15 未臨界体系 4 における Y_U 値のモンテカルロシミュレーション結果

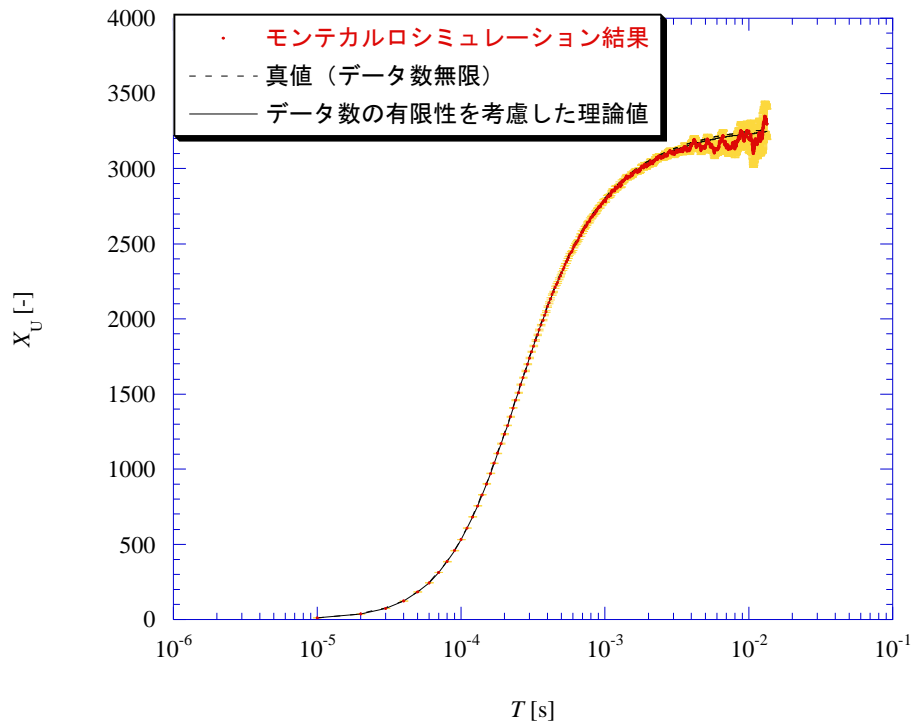


Fig. 5-16 未臨界体系 4 における X_U 値のモンテカルロシミュレーション結果

5.2.4.3 三次中性子相関法におけるデータ数有限性の効果

各未臨界体系 1~4 に対してモンテカルロシミュレーションにより得られた Y_S 、 X_S 値あるいは Y_U 、 X_U 値を解析することで、 Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ を推定し、得られた Y_∞ 、 X_∞ から三次中性子相関法により未臨界度の絶対値を評価した。以下で述べる 4 通りの解析条件 A~D に対して、三次中性子相関法による未臨界度評価を行った。

- A) 標本分散 v_S および標本三次モーメント s_S を用いて評価された Y_S 、 X_S 値に対して、データ数を無限とした従来の Y 、 X 値の理論式 ((5-13)、(5-16)式) をフィッティングすることにより Y_∞ 、 X_∞ を推定
- B) 標本分散 v_S および標本三次モーメント s_S を用いて評価された Y_S 、 X_S 値に対してデータ数の有限性の効果を考慮に入れた理論式 ((5-22)、(5-24)式) をフィッティングすることにより Y_∞ 、 X_∞ を推定
- C) 不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いて評価された Y_U 、 X_U 値に対して、データ数を無限とした従来の Y 、 X 値の理論式 ((5-13)、(5-16)式) をフィッティングすることにより Y_∞ 、 X_∞ を推定
- D) 不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いて評価された Y_U 、 X_U 値に対してデータ数の有限性の効果を考慮に入れた理論式 ((5-27)、(5-29)式) をフィッティングすることにより Y_∞ 、 X_∞ を推定

ただし、 Y 、 X 値の理論式のフィッティングは自作の最小二乗フィッティングプログラムにより行った^[28]。また最小二乗法でフィッティングする際に、三次中性子相関法の解析公式から得られる以下の関係式

$$X_{2\infty} = \frac{3}{1 + \delta_2(-\rho)} Y_\infty^2 \quad (5-37)$$

$$X_{3\infty} = F \frac{\{1 + \delta_3(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_2(-\rho)\}^2} Y_\infty^2 \quad (5-38)$$

を用いて、 X 値の二又、三又成分の飽和値 $X_{2\infty}$ 、 $X_{3\infty}$ を、 Y 値の飽和値 Y_∞ と未臨界度 $(-\rho)$ で表すことにした。こうすることで、理論式のフィッティングパラメーターを α 、 Y_∞ 、 $(-\rho)$ の 3 つだけにし、モンテカルロシミュレーションにより得られた Y 、 X 値を同時にフィッティングすることで未臨界度 $(-\rho)$ を直接評価した。今回の解析では、検出時間幅 T のフィッティング範囲 (最初の点からどこまでの点をフィッティングするか) を変化させて、フィッティングにより得られた α 、 $(-\rho)$ の推移を調べた。

以上で述べた解析条件 A~D により、各未臨界体系 1~4 に対して得られた中性子減衰定数 α のフィッティング結果とその真値を Fig. 5-17 から Fig. 5-20 に、未臨界度 $(-\rho)$ のフィッティング結果とその真値を Fig. 5-21 から Fig. 5-24 にそれぞれ示す。ただし Fig. 5-17 から Fig. 5-24 において、横軸の検出時間幅 T はフィッティング範囲を示す。

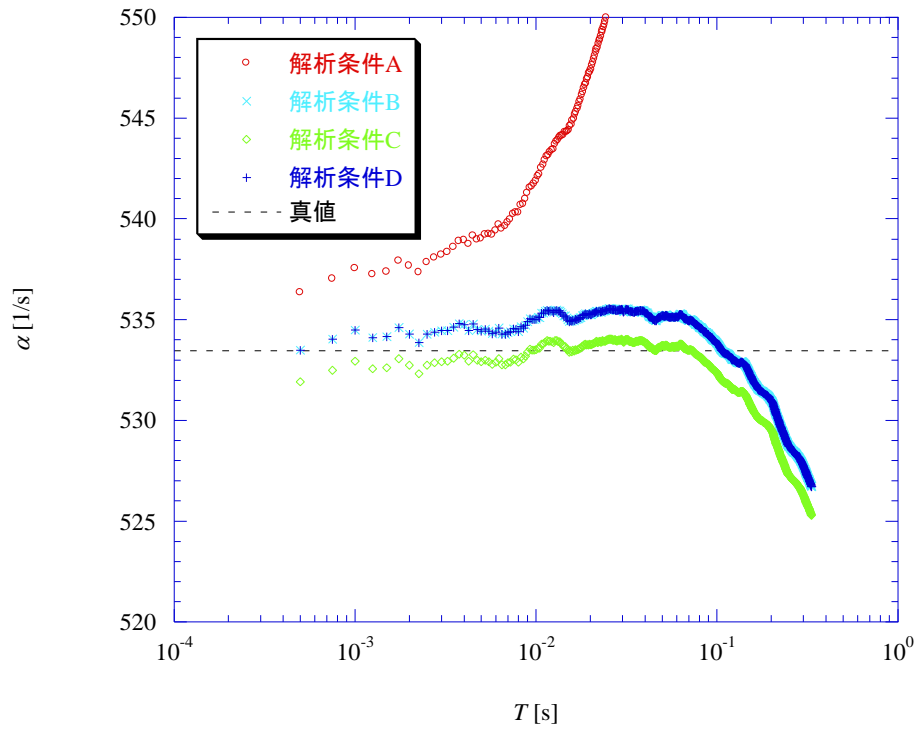


Fig. 5-17 未臨界体系 1 に対する中性子減衰定数 α のフィッティング結果

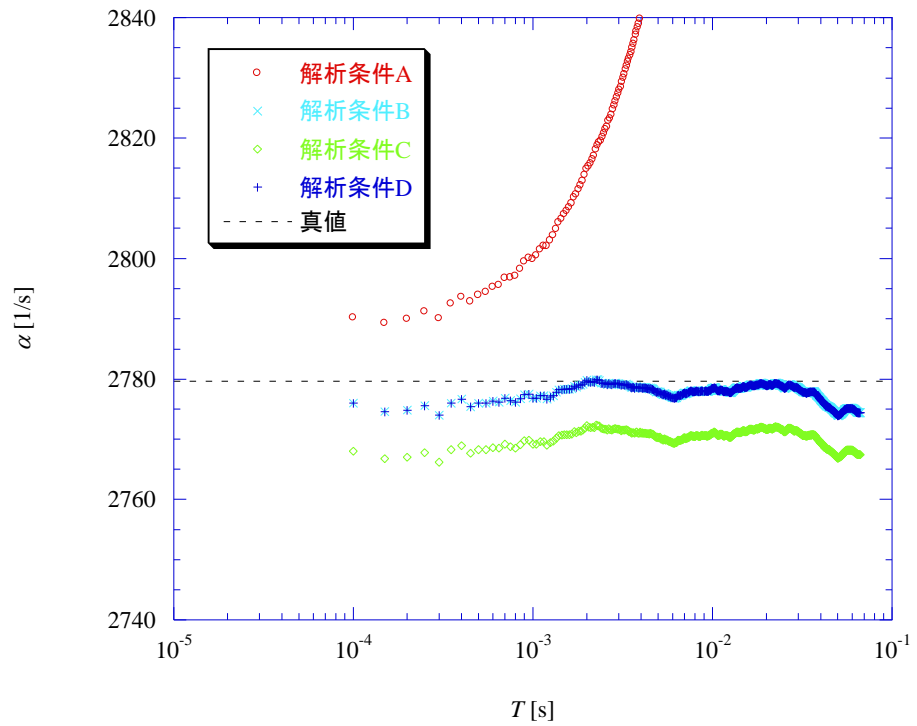


Fig. 5-18 未臨界体系 2 に対する中性子減衰定数 α のフィッティング結果

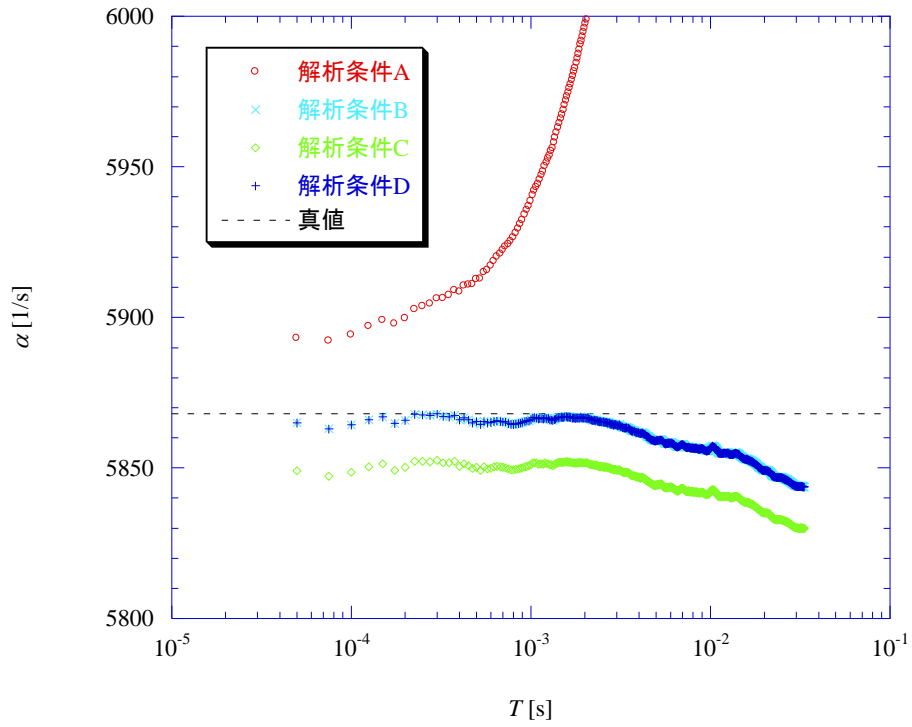


Fig. 5-19 未臨界体系 3 に対する中性子減衰定数 α のフィッティング結果

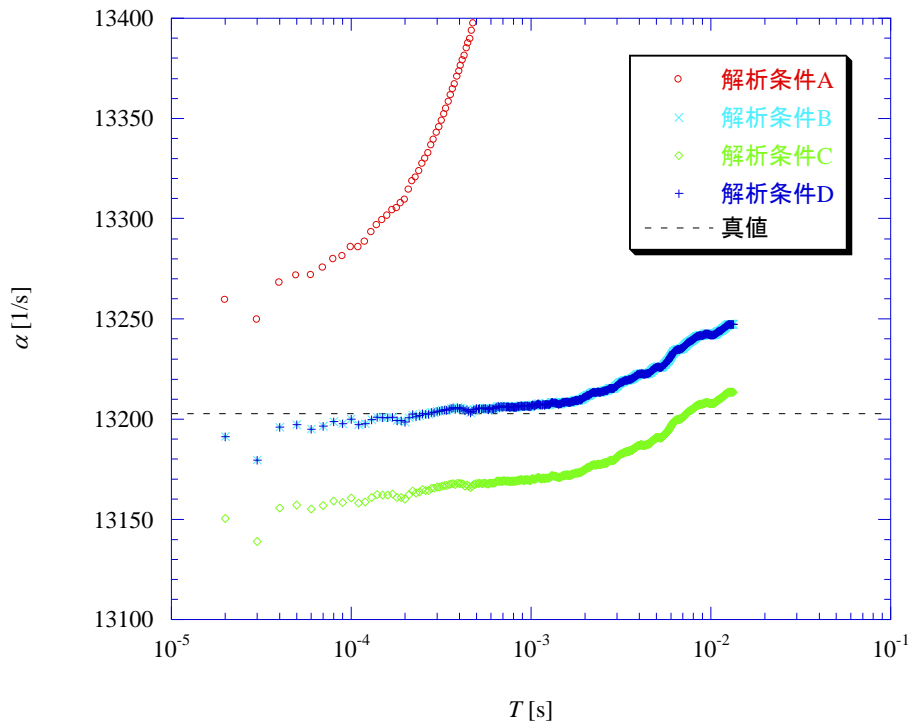


Fig. 5-20 未臨界体系 4 に対する中性子減衰定数 α のフィッティング結果

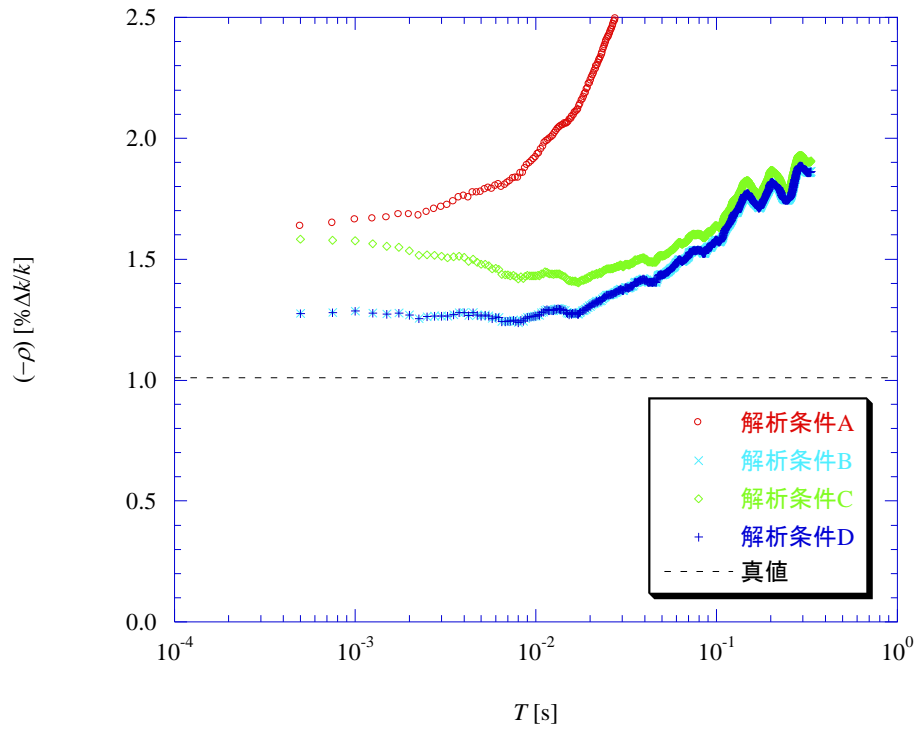


Fig. 5-21 未臨界体系 1 に対する未臨界度(- ρ)のフィッティング結果

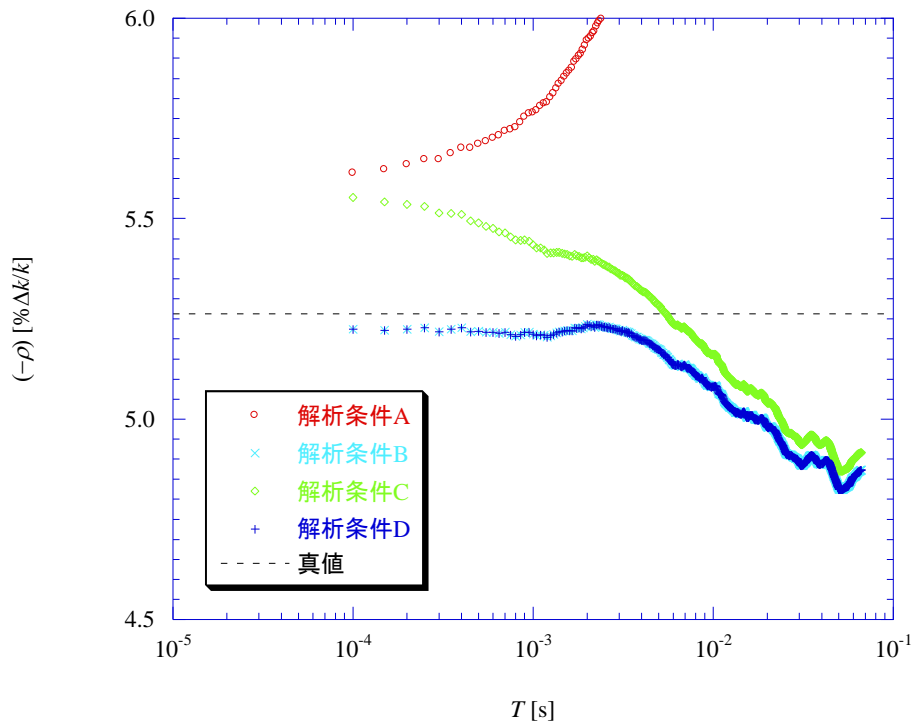


Fig. 5-22 未臨界体系 2 に対する未臨界度(- ρ)のフィッティング結果

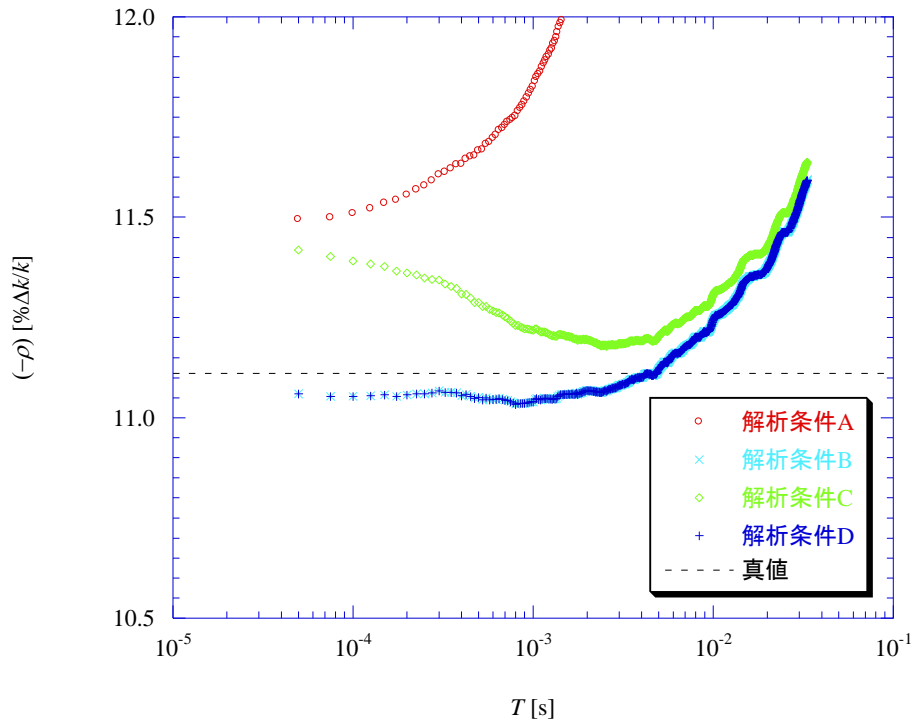


Fig. 5-23 未臨界体系 3 に対する未臨界度 $(-\rho)$ のフィッティング結果

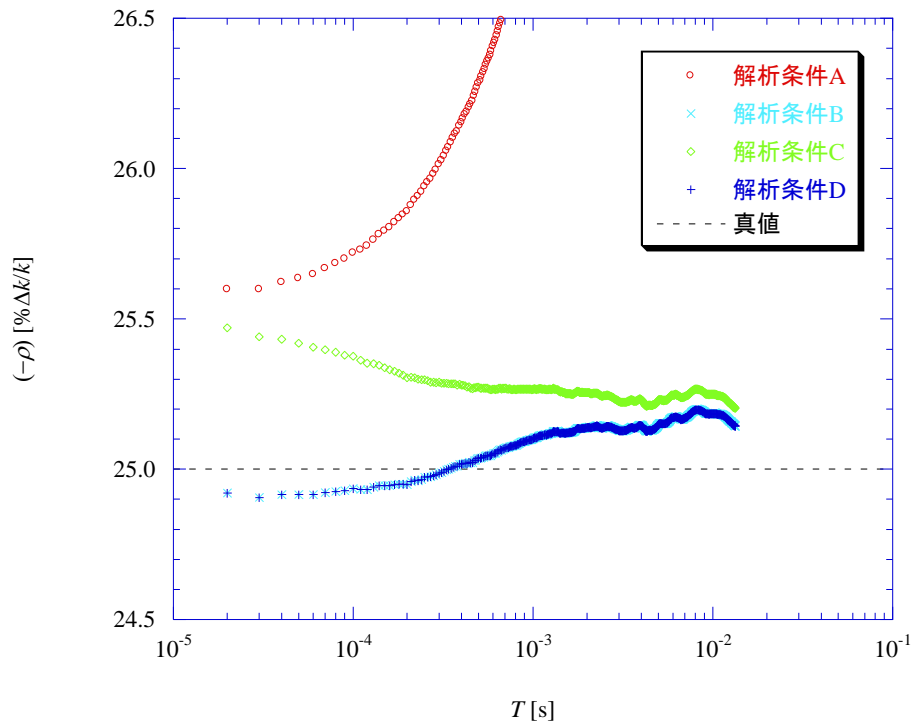


Fig. 5-24 未臨界体系 4 に対する未臨界度 $(-\rho)$ のフィッティング結果

以上で得られた Fig. 5-17 から Fig. 5-24 のフィッティング結果より、以下のことが分かる。

- 1) 標本分散 v_S および標本三次モーメント s_S を用いて評価された Y_S, X_S 値に対して、データ数 N を無限とした従来の Y, X 値の理論式 ((5-13)、(5-16)式) をフィッティングした場合 (解析条件 A)、データ数の有限性の効果が大きく現れない範囲、すなわちバンチング処理を用いてもデータ数が十分にある検出時間幅 T が比較的小さい範囲で理論式をフィッティングすれば、ある程度真値に近い $\alpha, (-\rho)$ を得ることができる。しかし、検出時間幅 T が大きくなるにつれ、バンチング処理によりデータ数 N が減少しデータ数の有限性の効果が大きくなるため、この方法では $\alpha, (-\rho)$ の真値を正しく推定することができない。また、他の 3 つの解析条件と比べると、得られた $\alpha, (-\rho)$ の真値からの系統誤差は大きい。
- 2) 不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いて評価された Y_U, X_U 値に対して、データ数 N を無限とした従来の Y, X 値の理論式 ((5-13)、(5-16)式) をフィッティングした場合 (解析条件 C)、どのフィッティング範囲でも比較的的真値に近い $\alpha, (-\rho)$ を得ることができる。ただし、検出時間幅 T が小さいほどデータ間の相関の効果が強く現れるため、このフィッティング範囲で得られた $\alpha, (-\rho)$ は真値からの系統誤差が若干大きい。逆に、検出時間幅 T が大きくなるにつれ、データ数の有限性を考慮に入れた理論式を用いて得られた $(-\rho)$ とほとんど同じ結果が得られることが分かる。
- 3) Y_S, X_S 値に対してデータ数の有限性の効果を考慮に入れた理論式 ((5-22)、(5-24)式) をフィッティングした場合 (解析条件 B)、あるいは Y_U, X_U 値に対してデータ数の有限性の効果を考慮に入れた理論式 ((5-27)、(5-29)式) をフィッティングした場合 (解析条件 D) については、最も真値に近い $\alpha, (-\rho)$ を得ることができる。特に、これらの Y, X 値の理論式 ((5-22)、(5-24)式および ((5-27)、(5-29)式) にはデータ間の相関の効果が正しく含まれているので、検出時間幅 T が小さい範囲でも真値に近い $\alpha, (-\rho)$ を得ることができる。

以上より、データ数の有限性の効果を考慮に入れた Y, X 値の理論式を用いて解析することで、三次中性子相関法により未臨界度の真値をより正しく推定できることが分かった。

また、不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いて Y, X 値を評価した場合には、データ数を無限とした従来の Y, X 値の理論式を用いて解析を行っても、比較的的真値に近い未臨界度を推定できることが分かった。すなわち、不偏分散 v_U および不偏三次モーメント s_U を用いて Y, X 値を評価するだけで、データ数の有限性の効果をほとんどなくすることができるという、非常に重要な結論を得ることができた。

5.3 空間依存性の効果の検証

三次中性子相関法を用いた実際の未臨界度測定に適用することを考えた場合、 Y, X 値に現れる空間依存性の効果について、特に検討を行う必要があると考えた。

ここでは、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラム^[11,26,27]、および自作の決定論的 Y, X 値計算プログラムを利用して、第 3 章、第 4 章で述べた二次相関量 Y 値および三

次相関量 X 値に現れる空間依存性の効果について検証する。 Y 、 X 値に現れる空間依存性の効果のみについて特に議論したいので、それ以外の条件はできる限り単純にして（エネルギー1群・遅発中性子無視）検証を行うことにする。

特に、本研究で新たに提案した、基本モード近似による三次中性子相関法を用いた未臨界度評価について検討を行う。その際に、空間の基本モード成分をできる限り抽出するためには、どのような線源強度の空間分布、あるいは検出領域の空間分布にすべきか検討を行う。

また、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを用いて、 Y 、 X 値の空間基本モード成分と高次モード成分の比を計算し、その比を補正因子として利用することで、基本モード近似による三次中性子相関法で得られた未臨界度の評価結果を改善できることを示す。

5.3.1 計算条件

自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムの計算条件を以下に示す。

- 1) 厚さ 100 cm の裸の 1 次元平板・均質体系 ($-50 \leq x[\text{cm}] \leq 50$)。真空境界条件を満足する。にその計算体系を示す。

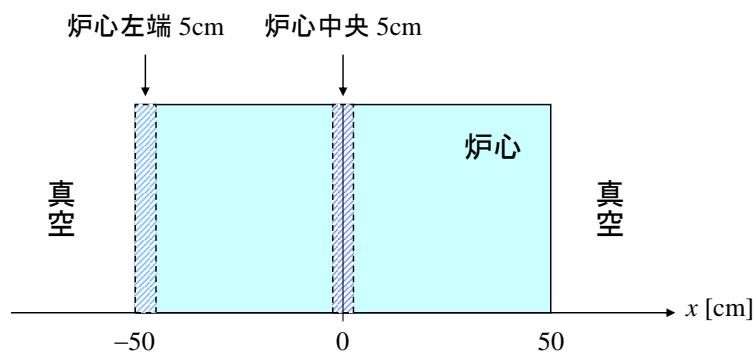


Fig. 5-25 計算体系（1次元平板・均質体系）

- 2) 中性子のエネルギー1群。
- 3) 遅発中性子無視、すなわち核分裂で発生した中性子は全て即発中性子とみなした。
- 4) 中性子は実験室系において等方散乱される。
- 5) 体系内の核分裂反応として ^{235}U による核分裂反応を想定した。その際、1核分裂反応当りに発生する中性子数 ν の確率分布 $p_f(\nu)$ は(5-1)式で表される二項分布に従うとし、二項分布のパラメーター $\langle \nu \rangle$ 、 ν_{\max} を $\langle \nu \rangle = 2.474$ 、 $\nu_{\max} = 5$ とした。核分裂で発生する中性子数の二次階乗モーメント $\langle \nu(\nu-1) \rangle$ 、三次階乗モーメント $\langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle$ の値は(5-2)、(5-3)式と同じである。
- 6) 外部中性子源として ^{252}Cf 自発核分裂中性子源を想定した。その際、1崩壊当りに発生する中性子数 q の確率分布 $p_s(q)$ は(5-4)式で表される二項分布に従うとし、二項分布のパラメーター $\langle q \rangle$ 、 q_{\max} を $\langle q \rangle = 3.876$ 、 $q_{\max} = 7$ とした。ここで、外部中性子源の崩壊により発生する中性子数の二次階乗モーメント $\langle q(q-1) \rangle$ 、三次階乗モーメント $\langle q(q-1)(q-2) \rangle$ の値は(5-5)、(5-6)式と同じである。

ここで、外部中性子源強度の空間分布 $S(x)$ として、以下の4通りについて計算を行った。

- i) 体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ分布： $S(x) \propto \psi_0(x)$
 $\psi_0(x)$ としては拡散理論から推定される(5-45)式を利用した。
- ii) 体系全体で一様に分布： $S \propto \text{const}$
- iii) 体系の中心位置に点線源： $S(x) \propto \delta(x)$
- iv) 体系の左側境界に点線源： $S(x) \propto \delta(x+50)$

ただし体系全体の線源強度を 10000 [1/s] に固定した。

- 7) 中性子の検出として捕獲反応を利用し、検出領域で捕獲された中性子は全て検出されたとみなした。

ここで、検出領域の空間分布、すなわち(5-7)式で定義される検出効率 $\varepsilon(x)$ の空間分布として、以下の4通りについて計算を行った。

- a) 体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ分布： $\varepsilon(x) \propto \psi_0(x)$
 $\psi_0(x)$ としては拡散理論から推定される(5-45)式を利用した。
- b) 体系全体で一様に検出： $\varepsilon = 1$
- c) 体系の中心 5cm の領域のみで検出： $\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (-2.5 \leq x \leq 2.5) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
- d) 体系の左端 5cm の領域のみで検出： $\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (-50 \leq x \leq -45) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

- 8) 未臨界体系として、実効増倍率は $k_{\text{eff}} = 0.99, 0.95, 0.90, 0.80$ がとなる4つの未臨界体系 1~4 を考える。これら4つの未臨界体系の1群定数を Table 5-4 に示す。

ここで k_{eff} は、拡散理論により以下のように推定することができる。

$$k_{\text{eff}} \cong \frac{\langle \nu \rangle \Sigma_f}{\Sigma_c + \Sigma_d + \Sigma_f + DB^2} \quad (5-39)$$

上式において、 D は拡散係数、 B^2 はバックリングを表す。今回の計算条件の場合、 D 、 B^2 は以下のように推定することができる。

$$D \cong \frac{1}{3\Sigma_t} \quad (5-40)$$

$$B^2 \cong \left(\frac{\pi}{100 + 2\delta} \right)^2 \quad (5-41)$$

$$\delta \cong 0.7104 \frac{1}{\Sigma_t} \quad (\text{外挿距離}) \quad (5-42)$$

上式において Σ_t は巨視的全断面積を表す。上式を用いて k_{eff} が 0.99、0.95、0.90、0.80 がとなるように、Table 5-4 おける1群定数を調整した。ただし各未臨界体系で拡散係数 D 、外挿距離 δ を一定にするため、巨視的全断面積 Σ_t および巨視的散乱断面積 Σ_s は各未臨界体系で一定とした。同様に、未臨界度 ($-\rho$)、および中性子減衰定数 α も、拡散理論により以下のように推定することができる。

$$(-\rho) \cong \frac{1 - k_{\text{eff}}}{k_{\text{eff}}} \cong \frac{\Sigma_c + \Sigma_d + \Sigma_f + DB^2}{\langle \nu \rangle \Sigma_f} - 1 \quad (5-43)$$

$$\alpha \cong \nu (\Sigma_c + \Sigma_d + \Sigma_f + DB^2 - \langle \nu \rangle \Sigma_f) \quad (5-44)$$

各未臨界体系 1~4 に対して、上式を用いて得られた k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α の推定値を Table 5-5 に示す。以下で述べるが、Table 5-5 で示した拡散理論により得られた k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α の推定値は、より厳密な輸送計算から求められた解析解とほとんど一致する。

Table 5-4 各未臨界体系における 1 群定数 (1 次元平板・均質体系)

未臨界体系	v [cm/s]	Σ_s [1/cm]	$\Sigma_c + \Sigma_d$ [1/cm]	Σ_f [1/cm]
1	1.39521×10^6	9.39369×10^{-1}	1.62331×10^{-2}	1.10499×10^{-2}
2	1.39521×10^6	9.39369×10^{-1}	1.66796×10^{-2}	1.06034×10^{-2}
3	1.39521×10^6	9.39369×10^{-1}	1.72377×10^{-2}	1.00453×10^{-2}
4	1.39521×10^6	9.39369×10^{-1}	1.83538×10^{-2}	8.92920×10^{-3}

Table 5-5 各未臨界体系に対して拡散理論により得られた k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α の推定値

未臨界体系	D [cm]	δ [cm]	B^2 [1/cm ²]	k_{eff} [-]	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]	α [1/s]
1	3.448×10^{-1}	7.349×10^{-1}	9.586×10^{-4}	0.9900	1.01	385.2
2	3.448×10^{-1}	7.349×10^{-1}	9.586×10^{-4}	0.9500	5.26	1926
3	3.448×10^{-1}	7.349×10^{-1}	9.586×10^{-4}	0.9000	11.11	3853
4	3.448×10^{-1}	7.349×10^{-1}	9.586×10^{-4}	0.8000	25.00	7705

- 9) シミュレーションにより Y 、 X 値を計算する際の、削除時間 t_{cut} 、測定時間 t_{measure} 、sweep 数は Table 5-3 のように設定した。ただし Table 5-3 において、各未臨界体系に対する全測定時間 $(t_{\text{cut}} + t_{\text{measure}}) \times \text{sweep}$ 数は 4080 [s] (約 1 時間) と一定にしてある。

Table 5-6 各未臨界体系における t_{cut} 、 t_{measure} 、sweep 数の設定値 (1 次元平板・均質体系)

未臨界体系	t_{cut} [s]	t_{measure} [s]	sweep 数
1	0.02	1.00	4000
2	0.004	0.200	20000
3	0.002	0.100	40000
4	0.001	0.050	80000

- 10) 時系列データの処理としてはバンチング法を用いた。その際、測定時間 t_{measure} の間の中性子検出時刻の時系列データに対して、基本ゲート数 N_0 が 4000 (基本ゲート幅 T_0 は $t_{\text{measure}}/4000$) の MCS を想定し処理を行った。5.2 で述べたように、不偏分散 v_S 、不偏三次モーメント s_S を利用することで、データ数の有限性の効果をほとんど排除することができる。従って、1sweep

ごとに中性子検出数の平均、不偏分散 v_U 、不偏三次モーメント s_U を推定し、全 sweep に対してこれらの平均を求めて(5-11)、(5-12)式により Y 、 X 値を評価した。

5.3.2 計算体系の検証

ここでは、以上で述べた 1 次元平板・均質体系について、自作の 1 次元 S_N 輸送計算プログラム^[29]を用いて実効増倍率 k_{eff} 、未臨界度 $(-\rho)$ 、中性子減衰定数 α 、体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ の解析解を求める。 S_N 法により得られた k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α 、 $\psi_0(x)$ の解析解と、拡散理論で得られた結果を比較することで、今回の計算体系・条件の場合は拡散理論が十分成立することが示される。

今回の計算に用いた中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムは輸送計算なので、 k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α 、 $\psi_0(x)$ の真値を推定するには拡散理論では不十分である。従って、 k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α 、 $\psi_0(x)$ の真値を厳密に推定するために、自作の 1 次元 S_N 輸送計算プログラムにより k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α 、 $\psi_0(x)$ の解析解を求めた。ただし自作の 1 次元 S_N 輸送計算プログラムにおける計算条件は以下のようである。

- 1) 厚さ 100 [cm]の平板を 1000 等分のメッシュに分割した。
- 2) x 軸との成す角 θ の余弦を表す角度変数 $\mu = \cos\theta$ については 32 分割した。ただし、そのメッシュ点、重みとしてはガウスの積分公式を利用した。

各未臨界体系 1~4 に対して、 S_N 法を用いて得られた k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α の解析解を Table 5-7 に示す。Table 5-5 と Table 5-7 を比較することで、 S_N 法により得られた k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α の解析解と、拡散理論による推定値がほとんど一致することが分かる。

Table 5-7 各未臨界体系に対して S_N 法により得られた k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α の解析解

未臨界体系	k_{eff} [-]	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]	α [1/s]
1	0.9900	1.01	385.2
2	0.9500	5.26	1927
3	0.9000	11.11	3854
4	0.8000	25.00	7708

さらに体系の実効増倍率 k_{eff} については、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションを用いて計算を行い、 S_N 法により得られた解析解と同じ結果が得られるかどうか確認計算を行った。ただし自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションによる k_{eff} 固有値計算の計算条件は以下のものである。

- 1) 1 バッチ当りのヒストリー数 1000000。ここでバッチとは k_{eff} を計算するための 1 つの計算単位であり、中性子が核分裂で発生してから、吸収もしくは漏れて一生を終えるまでの 1 世代を意味する。またヒストリー数とは 1 世代当りに発生する中性子数を意味する。
- 2) 全バッチ数 120。
- 3) 核分裂で発生する中性子数の空間分布が収束するまでの計算を除くため、最初の 20 バッチは k_{eff} の評価から除いた。

各未臨界体系 1~4 に対して、1)拡散理論、2)S_N法、3)モンテカルロシミュレーションにより、得られた k_{eff} の結果を Table 5-8 にまとめる。Table 5-8 より、モンテカルロシミュレーションにより得られた k_{eff} は、S_N法により得られた結果と統計誤差の範囲内で一致し、さらに拡散理論との推定値とも良く一致しているのが分かる。

Table 5-8 拡散理論、S_N法、モンテカルロシミュレーションにより得られた k_{eff} の比較

未臨界体系	$k_{\text{eff}} [-]$		
	拡散理論	S _N 法	モンテカルロ法
1	0.9900	0.9900	0.9900 ± 0.0001
2	0.9500	0.9500	0.9500 ± 0.0001
3	0.9000	0.9000	0.9000 ± 0.0002
4	0.8000	0.8000	0.7999 ± 0.0001

最後に、体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ について、拡散理論による推定値と S_N法により得られた $\psi_0(x)$ の解析解を比較する。拡散理論を用いることで $\psi_0(x)$ は以下のように推定される。

$$\psi_0(x) \cong \sqrt{\frac{2}{100+2\delta}} \cos\left(\frac{\pi}{100+2\delta}x\right) \quad (-50 \leq x[\text{cm}] \leq 50) \quad (5-45)$$

ただし上式において δ は外挿距離を表す。各未臨界体系に対して、上式で表される拡散理論により計算される $\psi_0(x)$ と、S_N法により得られた $\psi_0(x)$ の解析解を Fig. 5-26 から Fig. 5-29 に示す。ただし Fig. 5-26 から Fig. 5-29 において、 $\psi_0(x)$ を体系の中心 $x=0$ で $\psi_0(0)=1$ に規格化して示した。Fig. 5-26 から Fig. 5-29 により、どの未臨界体系に対しても拡散理論と S_N法により得られた $\psi_0(x)$ の間にはほとんど差がないのが分かる。従って、5.3.1 で述べた計算条件において、外部中性子源強度および検出効率の空間分布を $\psi_0(x)$ に比例させる場合に、拡散理論より求められる(5-45)式を用いても十分妥当であると考えた。

以上より、拡散理論と輸送計算によって得られた k_{eff} 、 $(-\rho)$ 、 α 、 $\psi_0(x)$ がほとんど一致することを確認できた。すなわち、今回の計算体系・条件は拡散理論が十分成立することが分かった。

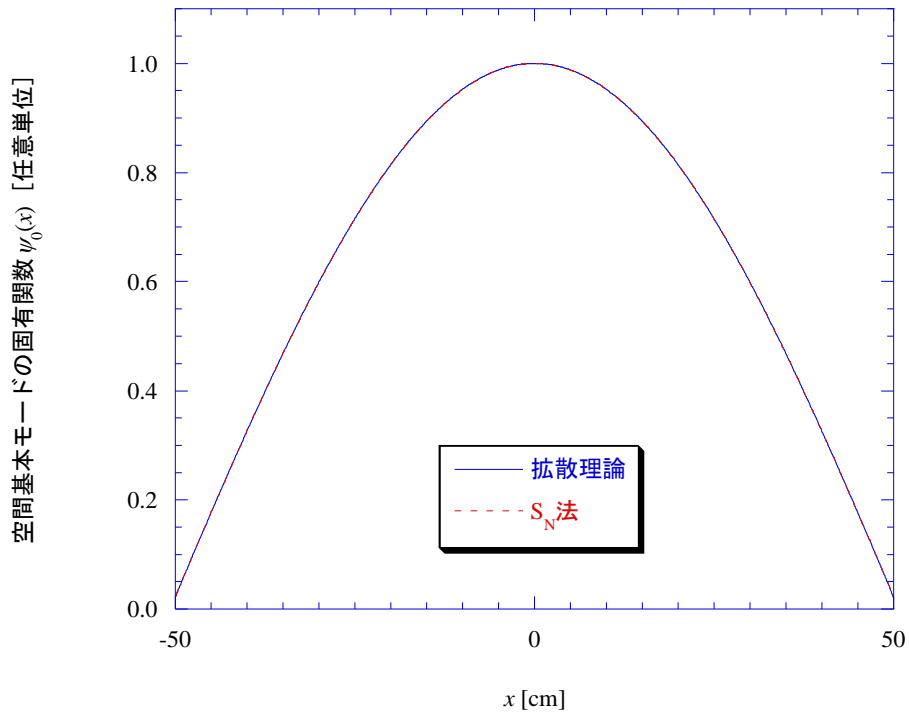


Fig. 5-26 未臨界体系 1 における空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ の比較

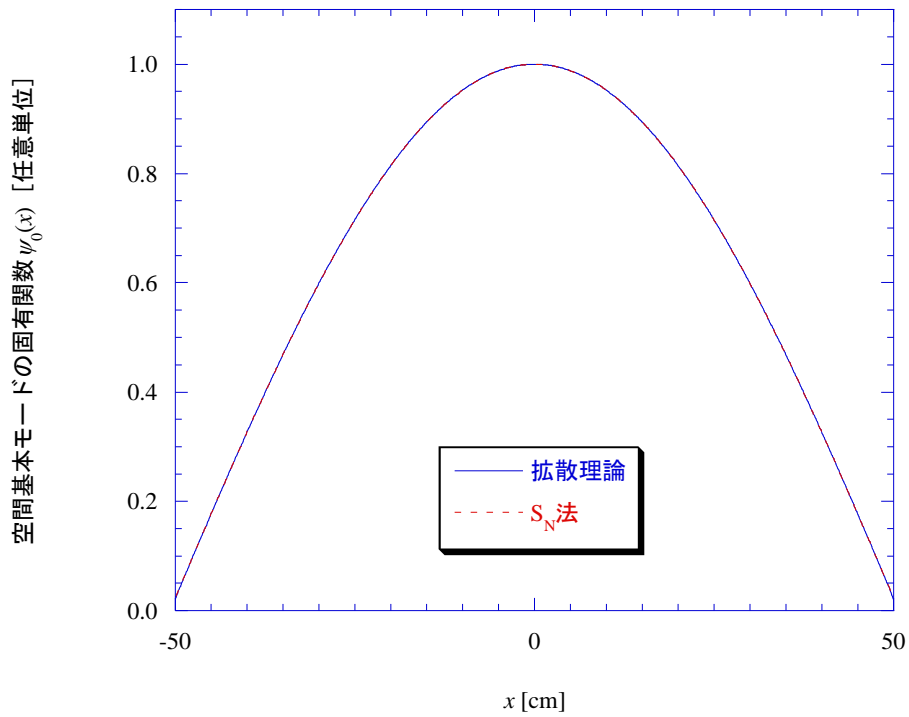


Fig. 5-27 未臨界体系 2 における空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ の比較

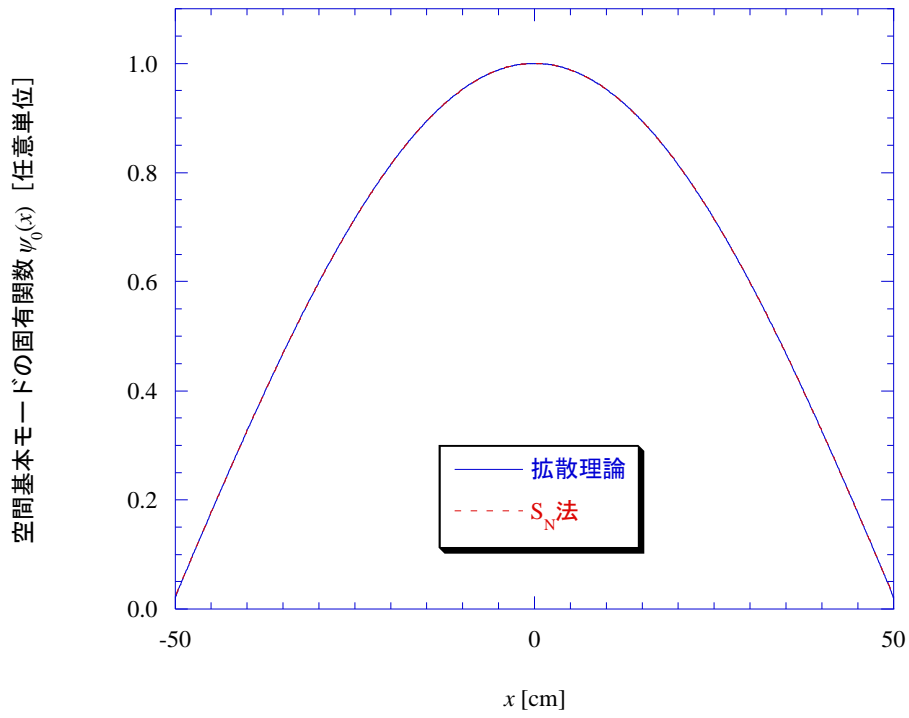


Fig. 5-28 未臨界体系 3 における空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ の比較

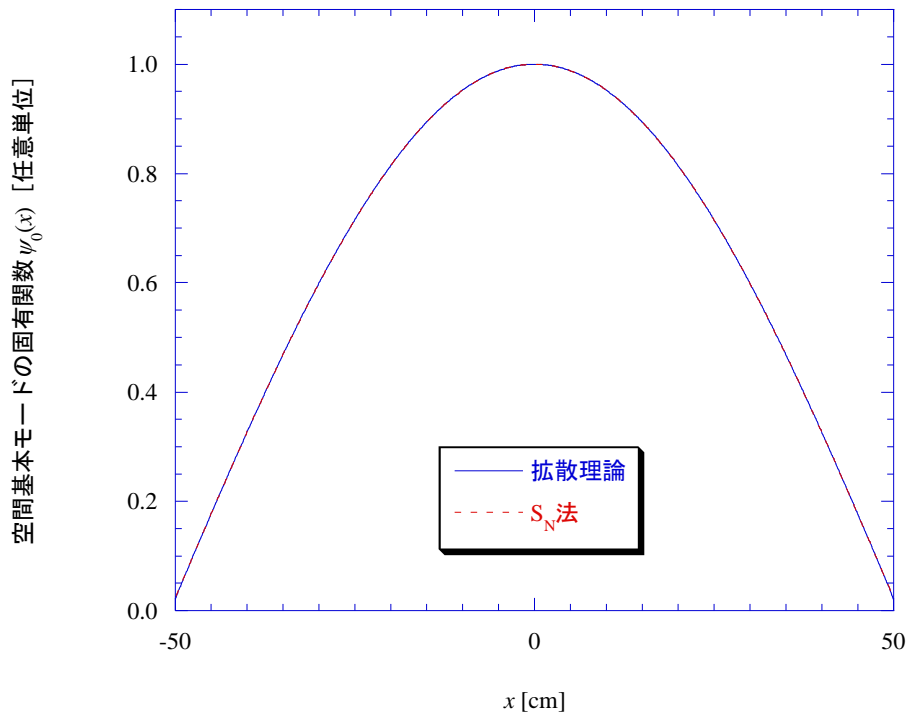


Fig. 5-29 未臨界体系 4 における空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ の比較

5.3.3 固有関数展開を利用した Y 、 X 値の理論式

1次元平板・均質体系、エネルギー1群、遅発中性子を無視した場合の Y 、 X 値の理論式は、第3章で述べたように、固有関数展開を利用して以下のように導出される。ただし、ここではデータ数の有限性の効果については議論しない。

a) 二次相関量 Y 値

$$Y(T) = \frac{2}{C_R} \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{nm} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} \right) \quad (5-46)$$

$$Y_\infty = \frac{1}{C_R} \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow mn}}{\alpha_l} \right) + S_{nm} \right\} \frac{D_m D_n}{\alpha_m \alpha_n} \quad (Y \text{ 値の飽和値}) \quad (5-47)$$

$$C_R = \sum_n \frac{S_n D_n}{\alpha_n} \quad (\text{計数率}) \quad (5-48)$$

b) 三次相関量 X 値

$$X(T) = X_2(T) + X_3(T) \quad (5-49)$$

$$\begin{aligned} X_2(T) = & \frac{6}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mn} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_n (\alpha_k + \alpha_l) (-\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n)} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_k T} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} + \left(1 + \frac{1}{\alpha_n T} \right) e^{-\alpha_n T} \delta_{kn} + \frac{\alpha_k e^{-\alpha_n T} - \alpha_n e^{-\alpha_k T}}{\alpha_k (\alpha_k - \alpha_n) T} (1 - \delta_{kn}) \right\} \\ & + \frac{6}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left[\left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mn}}{\alpha_k - \alpha_m - \alpha_n} \right. \\ & \left. + \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow km}}{\alpha_j} \right) + S_{km} \right\} \frac{F_{k \rightarrow ln}}{\alpha_k + \alpha_m} + \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kn}}{\alpha_j} \right) + S_{kn} \right\} \frac{F_{k \rightarrow lm}}{\alpha_k + \alpha_n} \right] \\ & \times \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} + \frac{\alpha_n}{\alpha_m} \frac{1 - e^{-(\alpha_m + \alpha_n) T}}{(\alpha_m + \alpha_n) T} \right\} \end{aligned} \quad (5-50)$$

$$X_{2\infty} = \frac{3}{C_R} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow kl}}{\alpha_j} \right) + S_{kl} \right\} \frac{F_{k \rightarrow mn} D_l D_m D_n}{\alpha_k \alpha_l \alpha_n \alpha_m} \quad (X \text{ 値二又成分の飽和値}) \quad (5-51)$$

$$\begin{aligned} X_3(T) = & \frac{6}{C_R} \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmn}}{\alpha_k} \right) + S_{lmn} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n) (\alpha_l + \alpha_m + \alpha_n)} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} - \frac{1 - e^{-\alpha_n T}}{\alpha_n T} + \frac{\alpha_n}{\alpha_m} \frac{1 - e^{-(\alpha_m + \alpha_n) T}}{(\alpha_m + \alpha_n) T} \right\} \end{aligned} \quad (5-52)$$

$$X_{3\infty} = \frac{1}{C_R} \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow lmn}}{\alpha_k} \right) + S_{lmn} \right\} \frac{D_l D_m D_n}{\alpha_l \alpha_m \alpha_n} \quad (X \text{ 値三又成分の飽和値}) \quad (5-53)$$

今回の計算条件（1次元平板・均質体系、ただし外部中性子源強度および検出効率には空間分布有り、エネルギー1群、等方散乱）の場合、上式の各定数は厳密には以下のように表される。

$$D_n = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu v \Sigma_d(x) \psi_n(x, \mu) \quad (5-54)$$

$$S_n = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu S(x) \langle q \rangle \Psi_n^\dagger(x) \quad (5-55)$$

$$S_{mn} = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu S(x) \langle q(q-1) \rangle \Psi_m^\dagger(x) \Psi_n^\dagger(x) \quad (5-56)$$

$$S_{lmn} = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu S(x) \langle q(q-1)(q-2) \rangle \Psi_l^\dagger(x) \Psi_m^\dagger(x) \Psi_n^\dagger(x) \quad (5-57)$$

$$F_{l \rightarrow mn} = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu v \Sigma_f \psi_l(x, \mu) \langle v(v-1) \rangle \Psi_m^\dagger(x) \Psi_n^\dagger(x) \quad (5-58)$$

$$F_{k \rightarrow lmn} = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu v \Sigma_f \psi_k(x, \mu) \langle v(v-1)(v-2) \rangle \Psi_l^\dagger(x) \Psi_m^\dagger(x) \Psi_n^\dagger(x) \quad (5-59)$$

$$\Psi_n^\dagger(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \psi_n^\dagger(x, \mu) \quad (5-60)$$

ただし $\psi_n(x, \mu)$ 、 $\psi_n^\dagger(x, \mu)$ は以下で表される α 固有値方程式の固有関数および随伴固有関数である。

$$\mathbf{B} \psi_n(x, \mu) = \alpha_n \psi_n(x, \mu) \quad (5-61)$$

$$\mathbf{B} = v \mu \frac{\partial}{\partial x} + v \Sigma_t - \frac{1}{2} (v \Sigma_s + v \Sigma_f \langle v \rangle) \int_{-1}^1 d\mu' \quad (5-62)$$

$$\mathbf{B}^\dagger \psi_n^\dagger(x, \mu) = \alpha_n \psi_n^\dagger(x, \mu) \quad (5-63)$$

$$\mathbf{B}^\dagger = -v \mu \frac{\partial}{\partial x} + v \Sigma_t - \frac{1}{2} (v \Sigma_s + v \Sigma_f \langle v \rangle) \int_{-1}^1 d\mu' \quad (5-64)$$

5.3.3 で述べたように、今回の計算体系・条件は拡散理論が十分成立する。拡散理論を用いれば、 Y 、 X 値の理論式に表れる各定数は以下のように近似することができる。ただしエネルギー1群の拡散理論の場合、固有関数が自己随伴となるため $\psi_n(x) = \psi_n^\dagger(x)$ である。

$$D_n \cong \int_{-50}^{50} dx v \Sigma_d(x) \psi_n(x) \quad (5-65)$$

$$S_n \cong \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \psi_n(x) \quad (5-66)$$

$$S_{mn} \cong \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q(q-1) \rangle \psi_m(x) \psi_n(x) \quad (5-67)$$

$$S_{lmn} \cong \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q(q-1)(q-2) \rangle \psi_l(x) \psi_m(x) \psi_n(x) \quad (5-68)$$

$$F_{l \rightarrow mn} \cong \int_{-50}^{50} dx v \Sigma_f \psi_l(x) \langle v(v-1) \rangle \psi_m(x) \psi_n(x) \quad (5-69)$$

$$F_{k \rightarrow lmn} \cong \int_{-50}^{50} dx v \Sigma_f \psi_k(x) \langle v(v-1)(v-2) \rangle \psi_l(x) \psi_m(x) \psi_n(x) \quad (5-70)$$

ただし、 n 次の空間高次モード $\psi_n(x)$ は拡散理論により以下のように導出される。

$$\psi_n(x) \cong \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{100+2\delta}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi x}{100+2\delta}\right) & n = 0, 2, 4, \dots \\ \sqrt{\frac{2}{100+2\delta}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi x}{100+2\delta}\right) & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (-50 \leq x[\text{cm}] \leq 50) \quad (5-71)$$

上式において δ は外挿距離を表す。上式より、空間高次モード $\psi_n(x)$ より、 $\psi_n(x)$ の節（値がゼロになる点）に点線源もしくは検出領域を配置することで、 n 次の高次モード成分 S_n 、 D_n が励起されるのを防ぐ（ $S_n \cong 0$ 、 $D_n \cong 0$ ）ことができると考えられる。また、体系全体に線源もしくは検

出領域が一様に存在する場合には、体系の対称性より奇数次の空間高次モード成分 S_n 、 D_n を完全に消去できる。

さらに、外部中性子源強度の空間分布 $S(x)$ を空間基本モード $\psi_0(x)$ と同じにすることで、固有関数の直交性により、定数 S_n について基本モードの S_0 成分のみを抽出することができる。

$$S_n \equiv \int_{-50}^{50} dx S \psi_0(x) \langle q \rangle \psi_n(x) = S_0 \delta_{n0} \quad (5-72)$$

同様に、検出効率の空間分布 $\varepsilon(x)$ を空間基本モード $\psi_0(x)$ と同じにすることで、固有関数の直交性により、定数 D_n について基本モードの D_0 成分のみを抽出することができる。

$$D_n \equiv \int_{-50}^{50} dx \nu \Sigma_d \psi_0(x) \psi_n(x) = D_0 \delta_{n0} \quad (5-73)$$

仮に基本モードの D_0 成分のみを抽出できたとすると、(5-46)から(5-53)式で表される Y 、 X 値の理論式は以下のように単純な形になる。特に Y 値については、基本モードの中性子減衰定数 α_0 のみの関数形を抽出することができる。

$$Y(T) = Y_\infty \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} \right) \quad (5-74)$$

$$Y_\infty = \left\{ \left(\sum_l \frac{S_l F_{l \rightarrow 00}}{S_0 \alpha_l} \right) + \frac{S_{00}}{S_0} \right\} \frac{D_0}{\alpha_0} \quad (Y \text{ 値の飽和値}) \quad (5-75)$$

$$X(T) = X_2(T) + X_3(T) \quad (5-49)$$

$$\begin{aligned} X_2(T) = 6 \sum_k \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow k0}}{S_0 \alpha_j} \right) + \frac{S_{k0}}{S_0} \right\} & \frac{F_{k \rightarrow 00} D_0^2}{\alpha_k (\alpha_k + \alpha_0) (-\alpha_k + 2\alpha_0)} \\ & \times \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha_k T} - \frac{1 - e^{-\alpha_0 T}}{\alpha_0 T} + \left(1 + \frac{1}{\alpha_0 T} \right) e^{-\alpha_0 T} \delta_{k0} + \frac{\alpha_k e^{-\alpha_0 T} - \alpha_0 e^{-\alpha_k T}}{\alpha_k (\alpha_k - \alpha_0) T} (1 - \delta_{k0}) \right\} \end{aligned} \quad (5-76)$$

$$+ 3 \sum_k \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow k0}}{S_0 \alpha_j} \right) + \frac{S_{k0}}{S_0} \right\} \frac{(\alpha_k - \alpha_0) F_{k \rightarrow 00}}{(\alpha_k + \alpha_0) (\alpha_k - 2\alpha_0)} \left(\frac{D_0}{\alpha_0} \right)^2 \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha_0 T} + e^{-2\alpha_0 T}}{2\alpha_0 T} \right)$$

$$X_{2\infty} = 3 \sum_k \left\{ \left(\sum_j \frac{S_j F_{j \rightarrow k0}}{S_0 \alpha_j} \right) + \frac{S_{k0}}{S_0} \right\} \frac{F_{k \rightarrow 00}}{\alpha_k} \left(\frac{D_0}{\alpha_0} \right)^2 \quad (X \text{ 値二又成分の飽和値}) \quad (5-77)$$

$$X_3(T) = X_{3\infty} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha_0 T} + e^{-2\alpha_0 T}}{2\alpha_0 T} \right) \quad (5-78)$$

$$X_{3\infty} = \left\{ \left(\sum_k \frac{S_k F_{k \rightarrow 000}}{S_0 \alpha_k} \right) + \frac{S_{000}}{S_0} \right\} \left(\frac{D_0}{\alpha_0} \right)^2 \quad (X \text{ 値三又成分の飽和値}) \quad (5-79)$$

以上より、できる限り Y 、 X 値の基本モード成分を抽出するためには、外部中性子源強度および検出効率の空間分布を $\psi_0(x)$ と同じにすることが有効であると考えられる。

5.3.4 基本モード近似による三次中性子相関法の解析公式

できる限り Y 、 X 値の基本モード成分を抽出することができるように、外部中性子源強度または検出領域の空間分布（あるいは配置）を工夫するか、あるいは体系の空間基本モードが空間高次モードに比べて優越であれば、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の基本モード成分の飽和値 $Y_{\infty,0}$ 、 $X_{\infty,0}$ を推定することができると考えられる。そのとき、以下で表される基本モード近似による三

次中性子相関法の解析公式を適用することが可能であると考えられる。

$$\frac{X_{\infty,0}}{Y_{\infty,0}^2} = \frac{X_{2\infty,0} + X_{3\infty,0}}{Y_{\infty,0}^2} = \frac{3}{1 + \delta_{2,0}(-\rho)} + F_0 \frac{\{1 + \delta_{3,0}(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_{2,0}(-\rho)\}^2} \quad (5-80)$$

ただし式中の定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 は以下で定義される。

$$\delta_{2,0} \equiv \frac{S_{00}}{S_0} \frac{1/\Lambda}{F_{0 \rightarrow 00}} \quad (5-81)$$

$$\delta_{3,0} \equiv \frac{S_{000}}{S_0} \frac{1/\Lambda}{F_{0 \rightarrow 000}} \quad (5-82)$$

$$F_0 \equiv \frac{F_{0 \rightarrow 000}/\Lambda}{(F_{0 \rightarrow 00})^2} \quad (5-83)$$

上式において Λ は中性子生成時間を表し、今回の計算体系・条件の場合、以下のように求められる。

$$\Lambda = \frac{1}{\langle \nu \rangle \nu \Sigma_f} \quad (5-84)$$

上式を用いて、1) (5-45)式で表される拡散理論から求められた空間基本モード $\psi_0(x)$ 、および2) 自作の1次元 S_N 輸送計算プログラムより求められた $\psi_0(x, \mu)$ 、 $\psi_0^\dagger(x, \mu)$ を用いて計算された、定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 の結果をそれぞれTable 5-9、Table 5-10に示す。ただしTable 5-10において、 S_N 法により得られた各未臨界体系の $\psi_0(x, \mu)$ 、 $\psi_0^\dagger(x, \mu)$ は境界付近でわずかに差があったので、念のため各未臨界体系に対して $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 の結果を示しておく。

まずTable 5-9、Table 5-10により、1点炉近似で得られた定数

$$\delta_2 \cong 1.679 \quad (5-34)$$

$$\delta_3 \cong 3.131 \quad (5-35)$$

$$F \cong 0.7500 \quad (5-36)$$

とは、外部中性子強度の空間分布によって異なる値になることが確認できる。外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードに比例する場合は比較的1点炉近似の値に近いが、特に体系の左側境界に点線源がある場合は大きく異なる。

またTable 5-9、Table 5-10を比較することで、拡散理論と S_N 法により得られた $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ の結果はほとんど同じであると言える。ただし体系の左側境界に点線源がある場合において、拡散理論と S_N 法により得られた $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ の結果が若干異なることが分かる。またTable 5-10より、体系の左側境界に点線源がある場合には、未臨界が深くなるにつれて S_N 法により得られた $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ がわずかに大きくなっているが、ほとんど同じとみなすことができる。

Table 5-9 拡散理論により得られた $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0

	外部中性子源強度の空間分布			
	基本モード分布	体系全体一様	体系中央点線源	体系左側境界点線源
$\delta_{2,0}$	1.679	1.554	1.978	0.04499
$\delta_{3,0}$	3.131	2.784	4.174	0.002161
F_0	0.7807	0.7807	0.7807	0.7807

Table 5-10 S_N 法により得られた $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0

未臨界体系 1

	外部中性子源強度の空間分布			
	基本モード分布	体系全体一様	体系中央点線源	体系左側境界点線源
$\delta_{2,0}$	1.679	1.554	1.978	0.03657
$\delta_{3,0}$	3.132	2.785	4.176	0.001427
F_0	0.7810	0.7810	0.7810	0.7810

未臨界体系 2

	外部中性子源強度の空間分布			
	基本モード分布	体系全体一様	体系中央点線源	体系左側境界点線源
$\delta_{2,0}$	1.679	1.554	1.978	0.03662
$\delta_{3,0}$	3.132	2.785	4.176	0.001431
F_0	0.7810	0.7810	0.7810	0.7810

未臨界体系 3

	外部中性子源強度の空間分布			
	基本モード分布	体系全体一様	体系中央点線源	体系左側境界点線源
$\delta_{2,0}$	1.679	1.554	1.978	0.03667
$\delta_{3,0}$	3.132	2.785	4.176	0.001435
F_0	0.7810	0.7810	0.7810	0.7810

未臨界体系 4

	外部中性子源強度の空間分布			
	基本モード分布	体系全体一様	体系中央点線源	体系左側境界点線源
$\delta_{2,0}$	1.679	1.554	1.978	0.03677
$\delta_{3,0}$	3.132	2.785	4.176	0.001443
F_0	0.7810	0.7810	0.7810	0.7810

5.3.5 モンテカルロシミュレーション計算結果

5.3.1 で述べた計算条件を用いて、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムによって数値計算を行った。得られた Y 、 X 値のシミュレーション結果は、未臨界体系が 4 通り、外部中性子源強度の空間分布が 4 通り、検出領域の空間分布が 4 通りで合計 64 通りある。

これら 64 通りの Y 、 X 値のモンテカルロシミュレーション結果を解析することで、1) 従来の 1 点炉近似による三次中性子相関法、および 2) 本研究で新たに提案した、基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られた未臨界度の評価結果を示す。

5.3.5.1 Y 、 X 値の解析法

Y 、 X 値のモンテカルロシミュレーション結果の一例として、未臨界体系 2、体系の中心位置に点線源、体系の中心 5cm の領域のみで検出した場合に得られた Y 、 X 値を Fig. 5-30、Fig. 5-31 に示す。このように得られた Y 、 X 値を、基本モード近似により得られる以下の解析式でフィッティングする。

$$Y(T) \cong Y_{\infty} \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \quad (5-85)$$

$$X(T) \cong X_{2\infty} \left(1 + e^{-\alpha T} - 2 \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) + X_{3\infty} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha T} + e^{-2\alpha T}}{2\alpha T} \right) \quad (5-86)$$

5.2.4.3 における理論式のフィッティングと同様に、上で表された Y 、 X 値の解析式のフィッティングは、自作の最小二乗フィッティングプログラムにより行った^[28]。また最小二乗法でフィッティングする際に、以下の関係式

$$X_{2\infty} = \frac{3}{1 + \delta_{2,0}(-\rho)} Y_{\infty}^2 \quad (5-87)$$

$$X_{3\infty} = F_0 \frac{\{1 + \delta_{3,0}(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_{2,0}(-\rho)\}^2} Y_{\infty}^2 \quad (5-88)$$

を用いて、解析式のフィッティングパラメーターを α 、 Y_{∞} 、 $(-\rho)$ の 3 つだけにし、 Y 、 X 値のモンテカルロシミュレーション結果を同時にフィッティングすることで未臨界度 $(-\rho)$ を直接評価した。今回の解析では、フィッティング範囲により恣意的な結果を得ることがないように、得られた全ての点に対してフィッティングを行った。

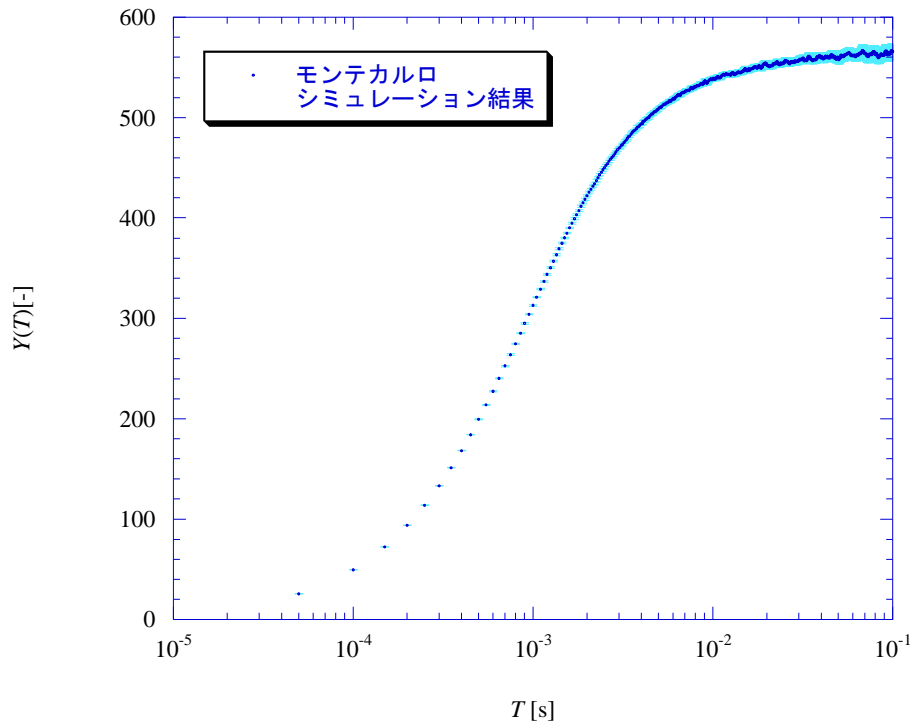


Fig. 5-30 モンテカルロシミュレーションによる Y 値の計算結果
未臨界体系 2、体系の中心位置に点線源、体系の中心 5cm の領域のみで検出

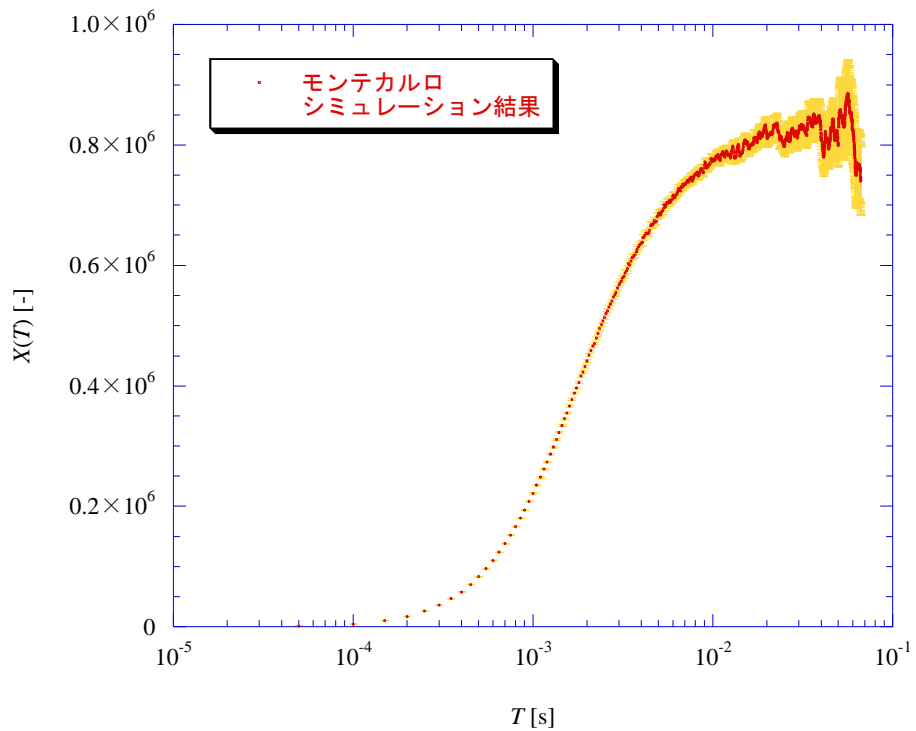


Fig. 5-31 モンテカルロシミュレーションによる X 値の計算結果
未臨界体系 2、体系の中心位置に点線源、体系の中心 5cm の領域のみで検出

5.3.5.2 1点炉近似による三次中性子相関法を用いた未臨界度評価結果

ここでは従来の1点炉近似による三次中性子相関法を用いて未臨界度評価を行う。ただし、1点炉近似あるいは基本モード近似による三次中性子相関法の両方において、フィッティングに用いる解析式自体は同じであり、三次中性子相関法における定数 δ_2 、 δ_3 、 F のみが異なることに注意しなければならない。ここで1点炉近似の定数としては(5-34)から(5-36)式を利用した。

従来の1点炉近似による三次中性子相関法を用いて得られた中性子減衰定数 α 、未臨界度($-\rho$)の評価結果を、Table 5-11、Table 5-12にそれぞれ示す。ただしTable 5-11、Table 5-12における誤差はフィッティングエラーである。

得られたTable 5-11、Table 5-12の結果より以下のことが分かる。

- 1) S_N 法により得られた中性子減衰定数 α の解析解、すなわち基本モードの中性子減衰定数 α_0 を正しく推定するためには、

検出領域	:	体系全体	>	体系中央の領域	>	体系端の領域
線源強度空間分布	:	体系全体一様、体系中央に点線源	>	体系端に点線源		
未臨界度	:	浅い	>	深い		

 ほうが良いことが分かる。特に今回考案した、検出効率 $\varepsilon(x)$ の空間分布を $\psi_0(x)$ に比例させて検出反応の基本モード成分 D_0 のみを抽出する方法では、線源強度空間分布や未臨界度に依存せずに解析解に近い値を得ることができた。この性質は D_0 のみを抽出した場合の Y 、 X 値の理論式((5-74)から(5-79)式)から容易に理解できる。
- 2) 外部中性子源強度の空間分布を空間基本モード分布と同じにし、検出効率の空間分布を空間基本モード分布と同じにするか、体系全体で中性子を検出することにより、1点炉近似による三次中性子相関法を用いても未臨界度($-\rho$)を評価することができた。
- 3) 逆に体系の左側境界に点線源がある場合、もしくは体系の左端に検出領域がある場合には、未臨界度($-\rho$)を正しく評価することができないのが分かる。特に体系の左側境界に点線源がある場合には、どのように検出を行っても正しい未臨界度を得ることができない。
- 4) 外部中性子源が体系全体で一様に分布し、検出効率 $\varepsilon(x)$ の空間分布を $\psi_0(x)$ に比例させるか、体系全体で中性子を検出した場合、 Y 、 X 値に現れる空間高次モードの影響はそれほど大きくないと予想した。しかし実際には、各未臨界体系に対して得られた未臨界度($-\rho$)の大小関係が逆転するという、非常に好ましくない結果が得られた。

以上をまとめると、従来の1点炉近似による三次中性子相関法を用いた場合、体系の空間依存性の影響により、未臨界度を正しく評価することができないと考えられる。

Table 5-11 1点炉近似による三次中性子相関法を用いて得られた中性子減衰定数 α i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	384.0 \pm 0.4	383.7 \pm 0.4	397.4 \pm 0.4	551.3 \pm 0.6
2	1927	1929.6 \pm 0.9	1916.8 \pm 0.8	2372 \pm 1	4512 \pm 5
3	3854	3855 \pm 1	3832 \pm 1	5081 \pm 2	9331 \pm 11
4	7708	7711 \pm 2	7660 \pm 2	10543 \pm 5	17684 \pm 28

ii) 外部中性子源が体系内全体で一様に分布

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	393.7 \pm 0.4	393.5 \pm 0.4	408.0 \pm 0.4	575.6 \pm 0.7
2	1927	1935 \pm 0.9	1935.5 \pm 0.9	2367 \pm 1	5117 \pm 5
3	3854	3856 \pm 1	3886 \pm 1	5036 \pm 3	10722 \pm 11
4	7708	7689 \pm 2	7808 \pm 2	10371 \pm 5	20073 \pm 23

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	385.3 \pm 0.4	384.2 \pm 0.4	403.8 \pm 0.4	526.8 \pm 0.6
2	1927	1933.1 \pm 0.8	1882.3 \pm 0.8	2549 \pm 1	3888 \pm 5
3	3854	3874 \pm 1	3712 \pm 1	5665 \pm 2	7582 \pm 16
4	7708	7713 \pm 2	7377 \pm 2	11878 \pm 3	15326 \pm 85

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	383 \pm 2	386 \pm 2	390 \pm 2	923 \pm 4
2	1927	1915 \pm 5	2041 \pm 5	2189 \pm 9	9335 \pm 15
3	3854	3829 \pm 8	4327 \pm 7	4698 \pm 25	17443 \pm 25
4	7708	7691 \pm 13	9288 \pm 9	9715 \pm 116	29627 \pm 40

Table 5-12 1点炉近似による三次中性子相関法を用いて得られた未臨界度 $(-\rho)$ i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	1.23 ± 0.08	0.91 ± 0.08	3.06 ± 0.09	11.1 ± 0.1
2	5.26	5.12 ± 0.04	4.93 ± 0.04	13.68 ± 0.05	29.77 ± 0.08
3	11.11	9.19 ± 0.03	9.90 ± 0.03	19.87 ± 0.04	38.22 ± 0.08
4	25.00	21.59 ± 0.03	23.77 ± 0.03	34.59 ± 0.05	47.7 ± 0.1

ii) 外部中性子源が体系全体で一様に分布

未臨界体系	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	2.69 ± 0.09	1.61 ± 0.08	6.04 ± 0.09	3.56 ± 0.09
2	5.26	2.11 ± 0.04	0.94 ± 0.04	12.76 ± 0.05	20.98 ± 0.07
3	11.11	6.45 ± 0.03	6.77 ± 0.03	19.70 ± 0.05	35.10 ± 0.08
4	25.00	17.87 ± 0.03	20.97 ± 0.03	34.18 ± 0.05	60.4 ± 0.1

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	2.05 ± 0.08	3.14 ± 0.08	0.00 ± 0.08	23.4 ± 0.1
2	5.26	7.99 ± 0.04	8.78 ± 0.04	3.74 ± 0.04	47.1 ± 0.1
3	11.11	14.72 ± 0.03	13.59 ± 0.03	20.03 ± 0.04	41.1 ± 0.1
4	25.00	28.86 ± 0.03	25.42 ± 0.03	56.01 ± 0.06	34.7 ± 0.2

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	0.0 ± 0.2	0.0 ± 0.2	10.8 ± 0.3	0.0 ± 0.7
2	5.26	0.0 ± 0.1	0.0 ± 0.1	23.6 ± 0.3	0.0 ± 0.1
3	11.11	0.0 ± 0.1	0.0 ± 0.1	26.2 ± 0.3	0.00 ± 0.06
4	25.00	0.0 ± 0.1	0.00 ± 0.07	13.1 ± 0.5	3.31 ± 0.06

5.3.5.3 基本モード近似による三次中性子相関法を用いた未臨界度評価結果

上で述べたように、従来の1点炉近似による三次中性子相関法では、体系の空間依存性の影響により未臨界度を正しく評価することができなかった。従って、体系の空間依存性を十分に考慮する必要がある。実際に得られた Y 、 X 値には明らかに空間高次モード成分が含まれているが、ここでは基本モード成分が優越であると仮定して、本研究で新たに提案した基本モード近似による三次中性子相関法を用いて未臨界度評価を行う。ここで基本モード近似による三次中性子相関法における定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 として、1)拡散理論により求められた $\psi_0(x)$ 、および2)自作の1次元 S_N 輸送計算プログラムより求められた $\psi_0(x, \mu)$ 、 $\psi_0^\dagger(x, \mu)$ を用いて計算されたTable 5-9、Table 5-10の両方の値を利用して検討を行う。

基本モード近似による三次中性子相関法を用いた中性子減衰定数 α 、未臨界度 $(-\rho)$ の評価結果について、拡散理論により求めた定数 (Table 5-9) を利用した場合に得られた α 、 $(-\rho)$ の評価結果をTable 5-13、Table 5-15に示す。また同様に、 S_N 法により求めた定数 (Table 5-10) を利用した場合に得られた α 、 $(-\rho)$ の評価結果をTable 5-14にTable 5-16それぞれ示す。

得られたTable 5-13からTable 5-16より、以下のことが分かる。

- 1) 1点炉近似あるいは基本モード近似による三次中性子相関法の両方において、得られた中性子減衰定数 α の結果はほとんど同じであることが分かる。ただし厳密には、体系の左側境界に点線源を配置した場合には、得られた α に差が見られる。
- 2) 同様に、未臨界度 $(-\rho)$ の結果についても、1点炉近似あるいは基本モード近似による三次中性子相関法の両方において、全体的な傾向はほとんど同じである。
- 3) 体系の中心位置に点線源があり、かつ検出効率 $\varepsilon(x)$ の空間分布を $\psi_0(x)$ と同じ場合については、基本モード近似により $(-\rho)$ の結果が改善されている。
- 4) 外部中性子源が体系全体で一様に分布し、検出効率 $\varepsilon(x)$ の空間分布を $\psi_0(x)$ と同じ場合については、1点炉近似では各未臨界体系に対して得られた未臨界度 $(-\rho)$ の大小関係が逆転していたが、基本モード近似を用いることで、この結果を改善することができた。
- 5) 三次中性子相関法の定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 について、拡散理論から求められた値を利用した場合と S_N 法から求められた値を利用した場合で、得られた未臨界度 $(-\rho)$ に差はない。ただし厳密には、体系の左側境界に点線源を配置した場合には得られた結果が大きく異なるが、何れにせよ未臨界度は正しく評価できていない。

以上より、基本モード近似による三次中性子相関法を用いても、1点炉近似による三次中性子相関法により得られた未臨界度の結果を劇的に改善できていないと言える。従って、現時点では基本モード近似による三次中性子相関法の有効性があまり示されていない。

Table 5-13 基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られた中性子減衰定数 α
 拡散理論から求められた定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 を利用した場合

i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	384.0 \pm 0.4	383.7 \pm 0.4	397.3 \pm 0.4	551.2 \pm 0.6
2	1927	1929.4 \pm 0.9	1916.6 \pm 0.8	2372 \pm 1	4508 \pm 5
3	3854	3854 \pm 1	3831 \pm 1	5078 \pm 2	9323 \pm 11
4	7708	7707 \pm 2	7656 \pm 2	10535 \pm 5	17669 \pm 28

ii) 体系全体で一様に分布炉心中央に点線源

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	393.6 \pm 0.4	393.4 \pm 0.4	407.8 \pm 0.4	575.4 \pm 0.7
2	1927	1934.4 \pm 0.9	1935.3 \pm 0.9	2365 \pm 1	5110 \pm 5
3	3854	3855 \pm 1	3884 \pm 1	5029 \pm 3	10703 \pm 11
4	7708	7679 \pm 2	7797 \pm 2	10350 \pm 5	20026 \pm 23

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	385.4 \pm 0.4	384.2 \pm 0.4	404.4 \pm 0.4	527.3 \pm 0.6
2	1927	1934 \pm 0.8	1883.3 \pm 0.8	2549 \pm 1	3893 \pm 5
3	3854	3877 \pm 1	3714 \pm 1	5669 \pm 2	7591 \pm 16
4	7708	7721 \pm 2	7384 \pm 2	11888 \pm 3	15339 \pm 86

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	378 \pm 2	365 \pm 2	406 \pm 2	941 \pm 4
2	1927	1799 \pm 4	1793 \pm 3	2239 \pm 8	7980 \pm 11
3	3854	3515 \pm 6	3595 \pm 4	5116 \pm 23	15864 \pm 21
4	7708	6663 \pm 10	7891 \pm 6	8594 \pm 100	28302 \pm 38

Table 5-14 基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られた中性子減衰定数 α
 S_N 法から求められた定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 を利用した場合

i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	384.0 \pm 0.4	383.7 \pm 0.4	397.3 \pm 0.4	551.2 \pm 0.6
2	1927	1929.4 \pm 0.9	1916.6 \pm 0.8	2372 \pm 1	4508 \pm 5
3	3854	3854 \pm 1	3831 \pm 1	5078 \pm 2	9323 \pm 11
4	7708	7707 \pm 2	7656 \pm 2	10535 \pm 5	17669 \pm 28

ii) 体系全体で一様に分布炉心中央に点線源

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	393.6 \pm 0.4	393.4 \pm 0.4	407.8 \pm 0.4	575.4 \pm 0.7
2	1927	1934.4 \pm 0.9	1935.3 \pm 0.9	2365 \pm 1	5110 \pm 5
3	3854	3855 \pm 1	3884 \pm 1	5029 \pm 3	10703 \pm 11
4	7708	7679 \pm 2	7797 \pm 2	10350 \pm 5	20026 \pm 23

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	385.4 \pm 0.4	384.2 \pm 0.4	404.4 \pm 0.4	527.3 \pm 0.6
2	1927	1934.0 \pm 0.8	1883.3 \pm 0.8	2549 \pm 1	3893 \pm 5
3	3854	3877 \pm 1	3714 \pm 1	5669 \pm 2	7591 \pm 16
4	7708	7721 \pm 2	7384 \pm 2	11888 \pm 3	15339 \pm 86

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	α [1/s]				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	385.2	378 \pm 2	366.1 \pm 2	405 \pm 2	893.0 \pm 3.5
2	1927	1803 \pm 4	1679 \pm 3	2371 \pm 8	8382 \pm 12
3	3854	3525 \pm 6	3797 \pm 5	5103 \pm 23	16812 \pm 23
4	7708	7070 \pm 10	8339 \pm 7	10046 \pm 113	29493 \pm 39

Table 5-15 基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られた未臨界度 $(-\rho)$
 拡散理論から求められた定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 を利用した場合

i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	$(-\rho) [\% \Delta k / k]$				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	1.24 ± 0.08	0.92 ± 0.08	3.09 ± 0.09	11.2 ± 0.1
2	5.26	5.17 ± 0.04	4.98 ± 0.04	13.85 ± 0.05	30.27 ± 0.08
3	11.11	9.29 ± 0.03	10.02 ± 0.03	20.16 ± 0.04	38.95 ± 0.09
4	25.00	21.92 ± 0.03	24.15 ± 0.03	35.24 ± 0.05	48.72 ± 0.11

ii) 体系全体で一様に分布炉心中央に点線源

未臨界体系	$(-\rho) [\% \Delta k / k]$				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	3.0 ± 0.1	1.79 ± 0.09	6.7 ± 0.1	4.0 ± 0.1
2	5.26	2.34 ± 0.04	1.04 ± 0.04	14.26 ± 0.06	23.52 ± 0.08
3	11.11	7.18 ± 0.03	7.54 ± 0.03	22.09 ± 0.05	39.68 ± 0.09
4	25.00	20.05 ± 0.03	23.59 ± 0.03	38.67 ± 0.06	69.4 ± 0.1

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	$(-\rho) [\% \Delta k / k]$				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	1.70 ± 0.07	2.60 ± 0.07	0.00 ± 0.07	19.3 ± 0.1
2	5.26	6.62 ± 0.03	7.27 ± 0.04	3.10 ± 0.03	38.99 ± 0.09
3	11.11	12.18 ± 0.03	11.25 ± 0.03	16.57 ± 0.03	34.1 ± 0.1
4	25.00	23.85 ± 0.03	21.01 ± 0.03	46.24 ± 0.05	28.7 ± 0.2

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	$(-\rho) [\% \Delta k / k]$				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	23 ± 2	110 ± 2	0 ± 1	1720 ± 326
2	5.26	135 ± 1	495 ± 3	0.0 ± 0.9	5376 ± 12
3	11.11	234 ± 1	4207 ± 13	0 ± 1	10191 ± 15
4	25.00	5879 ± 14	4851 ± 8	20654 ± 194	17050 ± 24

Table 5-16 基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られた未臨界度($-\rho$)
 S_N 法から求められた定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 を利用した場合

i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	$(-\rho) [\% \Delta k / k]$				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	1.24 ± 0.08	0.92 ± 0.08	3.09 ± 0.09	11.2 ± 0.1
2	5.26	5.17 ± 0.04	4.98 ± 0.04	13.85 ± 0.05	30.26 ± 0.08
3	11.11	9.29 ± 0.03	10.01 ± 0.03	20.15 ± 0.04	38.93 ± 0.09
4	25.00	21.92 ± 0.03	24.15 ± 0.03	35.23 ± 0.05	48.7 ± 0.1

ii) 体系全体で一様に分布炉心中央に点線源

未臨界体系	$(-\rho) [\% \Delta k / k]$				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	3.0 ± 0.1	1.78 ± 0.09	6.7 ± 0.1	4.0 ± 0.1
2	5.26	2.34 ± 0.04	1.04 ± 0.04	14.25 ± 0.06	23.51 ± 0.08
3	11.11	7.18 ± 0.03	7.53 ± 0.03	22.08 ± 0.05	39.66 ± 0.09
4	25.00	20.04 ± 0.03	23.58 ± 0.03	38.66 ± 0.06	69.4 ± 0.1

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	$(-\rho) [\% \Delta k / k]$				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	1.70 ± 0.07	2.60 ± 0.07	0.00 ± 0.07	19.3 ± 0.1
2	5.26	6.61 ± 0.03	7.26 ± 0.04	3.10 ± 0.03	39.0 ± 0.09
3	11.11	12.17 ± 0.03	11.24 ± 0.03	16.56 ± 0.03	34.1 ± 0.1
4	25.00	23.84 ± 0.03	21.01 ± 0.03	46.23 ± 0.05	28.7 ± 0.2

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	$(-\rho) [\% \Delta k / k]$				
	解析解(S_N 法)	D_0 成分のみ検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	22 ± 1	104 ± 2	0 ± 1	2216 ± 437
2	5.26	127 ± 1	8901 ± 26	0.0 ± 0.8	376 ± 1
3	11.11	214 ± 1	498 ± 1	0 ± 1	118.8 ± 0.5
4	25.00	341 ± 1	431.0 ± 0.8	0 ± 2	0.0 ± 0.3

5.3.5.4 モンテカルロシミュレーション結果の考察

基本モード近似による三次中性子相関法を用いても、未臨界度(- ρ)の結果をそれほど改善できなかった原因の一つとして、 Y 、 X 値に現れる空間高次モードの影響を完全には無視できなかった点が挙げられる。基本モード近似による三次中性子相関法では、検出・外部中性子源・核分裂反応に起因する高次モード成分 D_n 、 S_n 、 S_{mn} 、 S_{lmn} 、 $F_{l \rightarrow mn}$ 、 $F_{k \rightarrow lmn}$ が全て無視でき、基本モード成分 D_0 、 S_0 、 S_{00} 、 S_{000} 、 $F_{0 \rightarrow 00}$ 、 $F_{0 \rightarrow 000}$ のみで近似することができると仮定している。上で述べた結果より、検出反応の基本モード成分 D_0 のみを抽出する方法を用いても、未臨界度(- ρ)をそれ程正しく評価できなかったということは、外部中性子源や核分裂反応に起因する高次モード成分 S_n 、 S_{mn} 、 S_{lmn} 、 $F_{l \rightarrow mn}$ 、 $F_{k \rightarrow lmn}$ を無視できなかったことを意味する。

今回の計算条件では体系が 100 cm と大きく、体系バックリングがそれほど大きくない。そのため基本モードの固有値 α_0 と 1 次モードの固有値 α_1 との差が小さいために、高次モード成分を無視することが妥当ではなかったと考えられる。例えば拡散理論により、 n 次モードの固有値 α_n は

$$\alpha_n \cong v(\Sigma_c + \Sigma_d + \Sigma_f + D B_n^2 - \langle v \rangle \Sigma_f) \quad (5-89)$$

$$B_n^2 \cong \left(\frac{n\pi}{100 + 2\delta} \right)^2 \quad (5-90)$$

と求められる。よって基本モードの固有値 α_0 と 1 次モードの固有値 α_1 との差は

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_0 &\cong vD(B_1^2 - B_0^2) \\ &= vD \left\{ \left(\frac{2\pi}{100 + 2\delta} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{100 + 2\delta} \right)^2 \right\} \\ &= 3vD \left(\frac{\pi}{100 + 2\delta} \right)^2 \end{aligned} \quad (5-91)$$

となる。ここで拡散係数 D 、外挿距離 δ は巨視的全断面積 Σ_t を用いて以下のように推定される。

$$D \cong \frac{1}{3\Sigma_t} \quad (5-40)$$

$$\delta \cong 0.7104 \frac{1}{\Sigma_t} \quad (\text{外挿距離}) \quad (5-42)$$

今回の計算では各未臨界体系 1~4 で巨視的全断面積 Σ_t が一定なので、どの未臨界体系に対しても

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 1384 [1/s] \quad (5-92)$$

と求めることができる。上式を用いることで、未臨界が最も浅い未臨界体系 1 でも $\alpha_0/\alpha_1 = 0.22$ であり、それ以上未臨界が深い体系では α_0/α_1 が 0.5 を超えていることが分かる。 α_0/α_1 が 0 に近いほど基本モードと高次モードの固有値の差が大きく、基本モード成分が優越になる。逆に、 α_0/α_1 が 1 に近いほど基本モードと高次モードの固有値の差が小さく、高次モード成分の影響が顕著に現れるようになる。従って、今回の計算条件では空間高次モード成分を完全には無視できなかったことが分かった。

5.3.6 決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを利用した空間依存性の検討

上で述べたように、モンテカルロシミュレーションにより得られた Y 、 X 値に対して基本モード近似による三次中性子相関法を用いても、未臨界面度($-\rho$)の結果をそれほど正しく推定することができなかつた。この原因として、今回の計算条件では Y 、 X 値に現れる空間高次モードの影響を完全に無視できないことが分かった。

従って、今回の計算条件において、空間高次モードの影響が Y 、 X 値にどの程度影響を与えるのかを定量的に調べる必要があると考えた。そのためには、固有関数展開を利用して導出された Y 、 X 値の理論式 ((5-46)から(5-53)式) を厳密に計算して、基本モード成分のみの Y 、 X 値との比を取れば良い。しかし、固有関数展開を利用して導出された Y 、 X 値の理論式を数値計算する際には、以下のような問題点がある。

- 1) Y 、 X 値を厳密に計算するためには、全ての空間高次モード成分についての和を取る必要がある。しかし実際にはある程度の次数で空間高次モード成分を打ち切ることになるので、高次モード成分の次数を十分取らなければ、数値計算の誤差を避けることができない。
- 2) 計算で必要となる空間高次モードの次数だけ、固有値 α 、固有関数 ψ_n 、随伴固有関数 ψ_n^\dagger のセットをあらかじめ求めておく必要がある。
- 3) 空間高次モード成分の次数を N で打ち切ったとしても、 Y 値の場合はだいたい N^3 個、 X 値の場合はだいたい N^5 個の空間高次モード成分の和を取らなければならない。

以上より、固有関数展開を利用して導出された Y 、 X 値の理論式を用いて、 Y 、 X 値の数値計算を行うのはあまり有効な方法ではないと考えた。

そこで、第4章で述べた Y 、 X 値の一般理論を用いることで、 Y 、 X 値を決定論的に数値計算することを考えた。第4章で述べたように、「1個の中性子が体系に投入された場合の中性子検出数の階乗モーメント」を利用することで Y 、 X 値の数値解を求めることができる。この中性子検出数の階乗モーメントが従う随伴輸送方程式は、中性子束密度の輸送方程式とほぼ同じ形をしている。従って、中性子検出数の階乗モーメントの数値解は、中性子束密度の輸送方程式の数値解を求める場合と同様の方法（例えば S_N 法）を用いることで求めることができる。こうして中性子検出数の階乗モーメントを数値計算により求めることで、最終的に Y 、 X 値の数値解を得ることができる。

まずは、今回の計算条件（1次元平板・均質体系、エネルギー1群、遅発中性子無視）において、モンテカルロシミュレーションにより得られた Y 、 X 値の結果を、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより再現することができるかどうか検討を行った。

次に、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを用いて、今回の計算条件における Y 、 X 値の空間基本モード成分と高次モード成分の比を求め、 Y 、 X 値に現れる空間高次モードの影響を定量的に評価した。また、こうして評価された空間基本モード成分と高次モード成分の比を、三次中性子相関法の補正因子として利用することで、基本モード近似による三次中性子相関法を用いて未臨界面度をより正しく評価できることを示す。

5.3.6.1 1次元平板体系、エネルギー1群、遅発中性子を無視した場合のY、X値の理論

1個の中性子が時刻 t において位置 x に方向 μ で投入された時に、検出時間幅 T （検出開始時刻 t_{open} 、検出終了時刻 t_{close} 、 $T = t_{\text{close}} - t_{\text{open}}$ ）の間で中性子の検出を行うとする。ここで、検出された中性子数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントをそれぞれ $\langle C_G(T|x, \mu, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(T|x, \mu, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(T|x, \mu, t) \rangle$ と表すことにする。今回の計算条件（1次元平板・均質体系、ただし外部中性子源強度および検出効率には空間分布有り、エネルギー1群、遅発中性子無視、等方散乱）の場合、これらの中性子検出数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントが従う随伴輸送方程式は以下のように表される。

$$-\frac{\partial}{\partial t} \langle C_G(T|x, \mu, t) \rangle = -\mathbf{B}^\dagger \langle C_G(T|x, \mu, t) \rangle + v \Sigma_d(x) \xi(t, T) \quad (5-93)$$

$$\xi(t, T) = \begin{cases} 1 & \text{if } (t_{\text{open}} \leq t < t_{\text{close}}) \\ 0 & \text{if } (t < t_{\text{open}} \text{ or } t \geq t_{\text{close}}) \end{cases} \quad (5-94)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \langle C_G(C_G - 1)(T|x, \mu, t) \rangle \\ & = -\mathbf{B}^\dagger \langle C_G(C_G - 1)(T|x, \mu, t) \rangle + v \Sigma_f \langle v(v-1) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle C(T|x, \mu', t) \rangle \right)^2 \rangle \end{aligned} \quad (5-95)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(T|x, \mu, t) \rangle \\ & = -\mathbf{B}^\dagger \langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(T|x, \mu, t) \rangle \\ & \quad + v \Sigma_f \left\{ \begin{aligned} & 3 \langle v(v-1) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle C(C-1)(T|x, \mu', t) \rangle \right) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle C(T|x, \mu', t) \rangle \right) \rangle \\ & + \langle v(v-1)(v-2) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle C(T|x, \mu', t) \rangle \right)^3 \rangle \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (5-96)$$

ただし \mathbf{B}^\dagger は(5-64)式で定義される随伴ボルツマン演算子である。また中性子検出数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントの終期条件および境界条件は以下ようになる。

$$\langle C_G(T|x, \mu, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (5-97)$$

$$\langle C_G(T|x', \mu', t) \rangle = 0 \quad \text{if } (x' = -50 \text{ and } \mu' < 0) \text{ or } (x' = 50 \text{ and } \mu' > 0) \quad (5-98)$$

$$\langle C_G(C_G - 1)(T|x, \mu, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (5-99)$$

$$\langle C_G(C_G - 1)(T|x', \mu', t) \rangle = 0 \quad \text{if } (x' = -50 \text{ and } \mu' < 0) \text{ or } (x' = 50 \text{ and } \mu' > 0) \quad (5-100)$$

$$\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(T|x, \mu, t') \rangle = 0 \quad \text{if } (t' \geq t_{\text{close}}) \quad (5-101)$$

$$\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(T|x', \mu', t) \rangle = 0 \quad \text{if } (x' = -50 \text{ and } \mu' < 0) \text{ or } (x' = 50 \text{ and } \mu' > 0) \quad (5-102)$$

以上の時間依存の随伴輸送方程式から得られる中性子検出数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントを用いることで、Y、X値を以下のように求めることができる。

$$Y(T) = \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(C_G - 1)(T | x, \mu, t) \rangle \\ & + \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q(q-1) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(T | x, \mu, t) \rangle \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (5-103)$$

$$\left/ \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(T | x, \mu, t) \rangle \right.$$

$$X(T) = \left\{ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(T | x, \mu, t) \rangle \\ & + 3 \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q(q-1) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(C_G - 1)(T | x, \mu, t) \rangle \right) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(T | x, \mu, t) \rangle \right) \\ & + \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q(q-1)(q-2) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(T | x, \mu, t) \rangle \right)^3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left/ \int_{-\infty}^{t_{\text{close}}} dt \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(T | x, \mu, t) \rangle \right. \quad (5-104)$$

また、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における中性子検出数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントの定常解 $\langle C_G(\infty | x, \mu) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(\infty | x, \mu) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | x, \mu) \rangle$ を求めることで、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ を求めることができる。これらの中性子検出数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントの定常解が従う随伴輸送方程式は以下のよう表される。

$$\mathbf{B}^\dagger \langle C_G(\infty | x, \mu) \rangle = \nu \Sigma_d(x) \quad (5-105)$$

$$\mathbf{B}^\dagger \langle C_G(C_G - 1)(\infty | x, \mu) \rangle = \nu \Sigma_f \langle \nu(\nu - 1) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle C(\infty | x, \mu') \rangle \right)^2 \quad (5-106)$$

$$\mathbf{B}^\dagger \langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | x, \mu) \rangle$$

$$= \nu \Sigma_f \left\{ \begin{aligned} & 3 \langle \nu(\nu - 1) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle C(C - 1)(\infty | x, \mu') \rangle \right) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle C(\infty | x, \mu') \rangle \right) \\ & + \langle \nu(\nu - 1)(\nu - 2) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle C(\infty | x, \mu') \rangle \right)^3 \end{aligned} \right\} \quad (5-107)$$

ただし中性子検出数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントの境界条件は(5-98)、(5-100)、(5-102)式と同じである。

以上の定常状態の随伴輸送方程式から得られる中性子検出数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントを用いることで、 Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ を以下のように求めることができる。

$$Y_\infty = \frac{\left\{ \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(C_G - 1)(\infty | x, \mu) \rangle + \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q(q-1) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(\infty | x, \mu) \rangle \right)^2 \right\}}{\int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(\infty | x, \mu) \rangle} \quad (5-108)$$

$$X_\infty = \frac{\left\{ \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(\infty | x, \mu) \rangle + 3 \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q(q-1) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(C_G - 1)(\infty | x, \mu) \rangle \right) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(\infty | x, \mu) \rangle \right) + \int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q(q-1)(q-2) \rangle \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(\infty | x, \mu) \rangle \right)^3 \right\}}{\int_{-50}^{50} dx S(x) \langle q \rangle \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \langle C_G(\infty | x, \mu) \rangle} \quad (5-109)$$

上で述べた Y 、 X 値の理論において、角度変数 μ も考慮に入れた厳密な輸送方程式で記述したが、体系の角度方向の依存性がそれほど重要ではない場合は、第4章で述べたように、 Y 、 X 値に拡散近似を適用することができる。拡散近似により Y 、 X 値を求める場合には、中性子検出数の平均、二次階乗モーメント、三次階乗モーメントが従う随伴輸送方程式において、随伴ボルツマン演算子 B^\dagger を

$$B^\dagger = B = -vD \frac{\partial^2}{\partial x^2} + v\Sigma_c + v\Sigma_d + v\Sigma_f - v\Sigma_f \langle v \rangle \quad (5-110)$$

として、角度方向の積分をなくすだけでよい。ただし D は拡散係数を表す。

5.3.6.2 決定論的手法による Y 、 X 値の数値解法

ここでは、上で述べた Y 、 X 値の理論を用いた、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにおける数値解法について述べる。

a) 検出時間幅 T に対する Y 、 X 値の数値解法

検出時間幅 T に対する Y 、 X 値の変化を求めるためには、上で述べたように $\langle C_G(T | x, \mu, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(T | x, \mu, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G - 1)(C_G - 2)(T | x, \mu, t) \rangle$ が従う時間依存の随伴輸送方程式 ((5-93) から(5-96)式) を数値計算する必要がある。まず(5-93)から(5-96)式における時間微分項を陰的なスキームにより差分化して計算することにした^[30]。ここで陰的なスキームとは未来の値から過去の値を計算する方法である。ただし今考えている方程式は随伴形で時間微分項が負になっているので、通常的时间依存の輸送方程式における陽的なスキーム (過去の値から未来の値を計算する) と、数値解法としては同等である。こうして差分化された(5-93)から(5-96)式を S_N 法により解こうと試みたが、時間メッシュ幅を相当細かくする必要があり非常に長い計算時間を必要とした。そこで 5.3.2 で述べたように、今回の計算体系では拡散理論が十分に成立することを利用して、拡散近似を用いて(5-93)から(5-96)式を数値計算することにした^[13,29]。こうして得られた $\langle C_G(T | x, \mu, t) \rangle$ 、

$\langle C_G(C_G-1)(T|x, \mu, t) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(T|x, \mu, t) \rangle$ に対して、(5-103)、(5-104)式を用いて数値積分することで、ゲート時間幅 T に対する Y 、 X 値を計算した。

b) Y 、 X 値の飽和値の数値解法

Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ を求めるためには、上で述べたように検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における $\langle C_G(\infty|x, \mu) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(\infty|x, \mu) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(\infty|x, \mu) \rangle$ が従う定常状態の随伴輸送方程式 ((5-105)から(5-107)) を数値計算する必要がある。(5-105)から(5-107)式の随伴輸送方程式の数値計算は、 S_N 法を利用して行った。こうして得られた $\langle C_G(\infty|x, \mu) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(\infty|x, \mu) \rangle$ 、 $\langle C_G(C_G-1)(C_G-2)(\infty|x, \mu) \rangle$ に対して、(5-108)、(5-109)式を用いて数値積分することで、数値積分すること Y_∞ 、 X_∞ を計算した。

5.3.6.3 決定論的手法を用いた Y 、 X 値の数値計算結果

ここでは、今回の計算条件 (1次元平板・均質体系、エネルギー1群、遅発中性子無視) において、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより得られた Y 、 X 値の計算結果を示す。得られた Y 、 X 値の計算結果をモンテカルロシミュレーションの結果と比較することで、モンテカルロシミュレーションにより得られた Y 、 X 値の結果を、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより再現することができるかどうか検討を行った。

a) 検出時間幅 T に対する Y 、 X 値の計算結果

自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより得られた、検出時間幅 T に対する Y 、 X 値の計算結果の一例を示す。ただし計算条件は以下のものである。

- 1) 厚さ 100 [cm]の平板を 200 等分のメッシュに分割した。
- 2) 時間微分項を差分化する際、時間メッシュ幅を 2.5×10^{-7} [s]とした。
- 3) 外部中性子源が体系全体で一様に分布。
- 4) 体系全体で検出する。

以上の条件で、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより得られた Y 、 X 値の計算結果を、モンテカルロシミュレーションで得られた結果とともに、各未臨界体系 1~4 に対して Fig. 5-32 から Fig. 5-39 にそれぞれ示す。ただし Fig. 5-32 から Fig. 5-39 において、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより得られた Y 、 X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の結果も示しておく。Fig. 5-32 から Fig. 5-39 より、決定論的手法によって得られた Y 、 X 値の計算結果は、モンテカルロシミュレーションの結果を統計誤差の範囲内で非常に良く再現していることが分かる。ただし未臨界体系 1 においては、モンテカルロシミュレーションと自作の決定論的手法によって得られた Y 、 X 値の結果に若干差があるが、おそらくモンテカルロシミュレーションの統計誤差によるものだと考えられる。

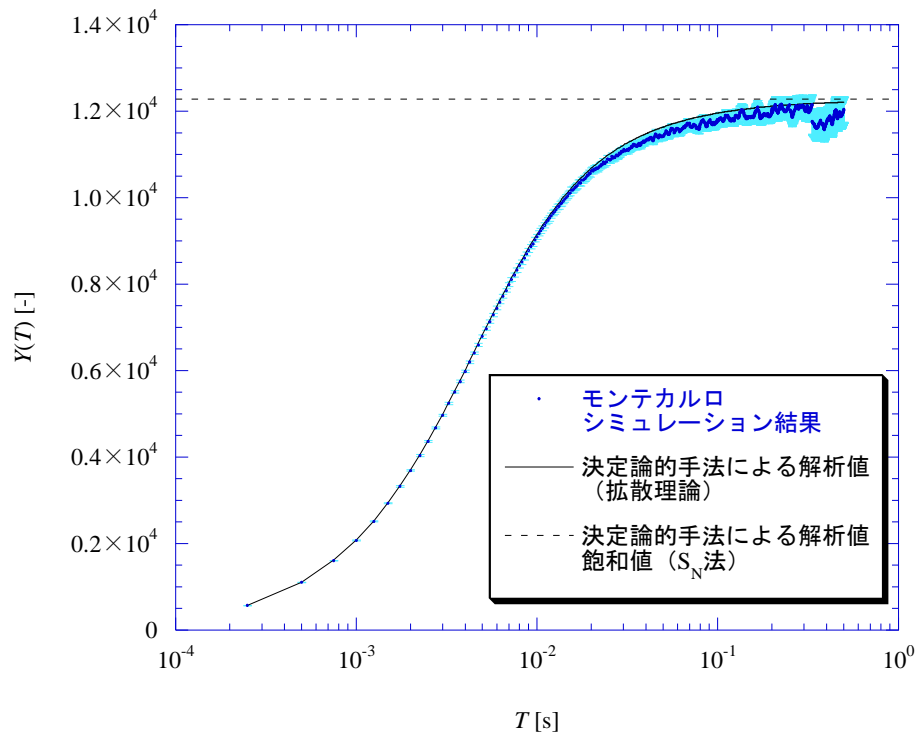


Fig. 5-32 決定論的手法により得られた Y 値の計算結果
未臨界体系 1、外部中性子源が体系全体で一様に分布、体系全体で検出

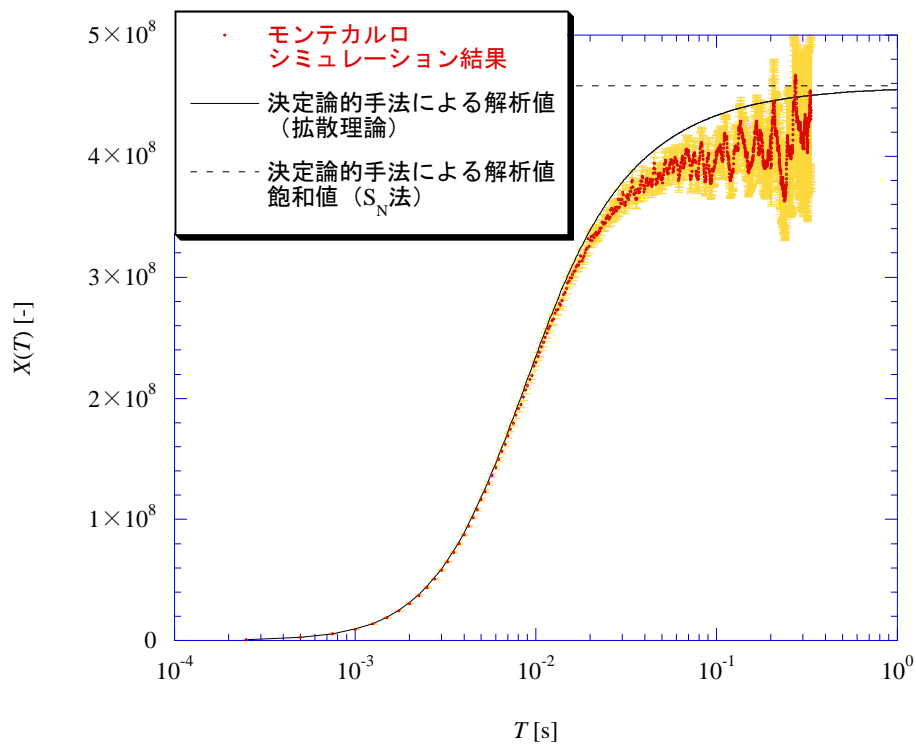


Fig. 5-33 決定論的手法により得られた X 値の計算結果
未臨界体系 1、外部中性子源が体系全体で一様に分布、体系全体で検出

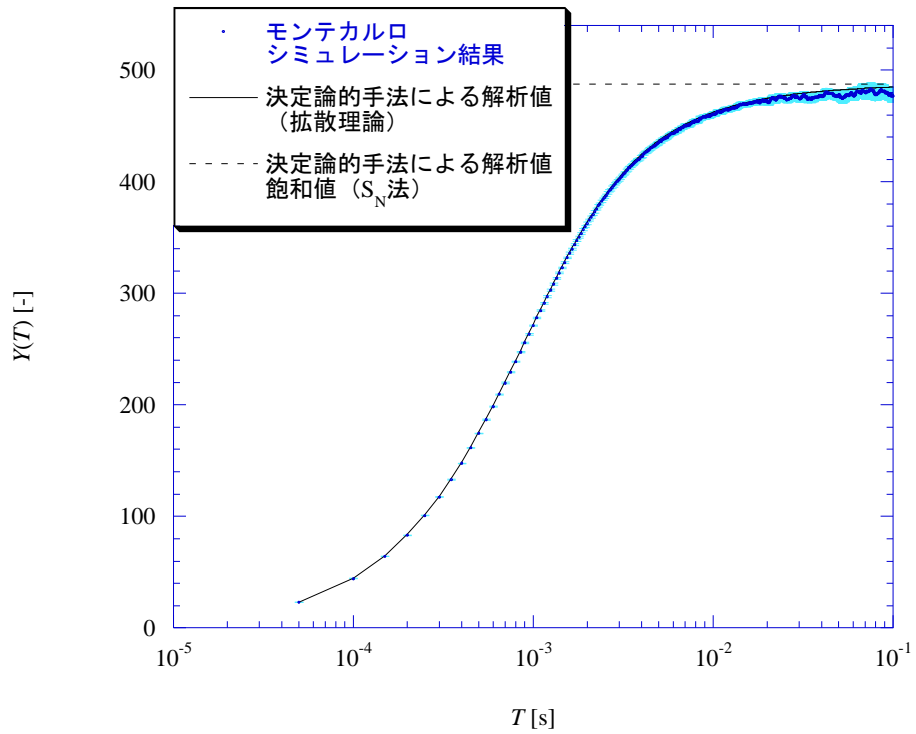


Fig. 5-34 決定論的手法により得られた Y 値の計算結果
未臨界体系 2、外部中性子源が体系全体で一様に分布、体系全体で検出

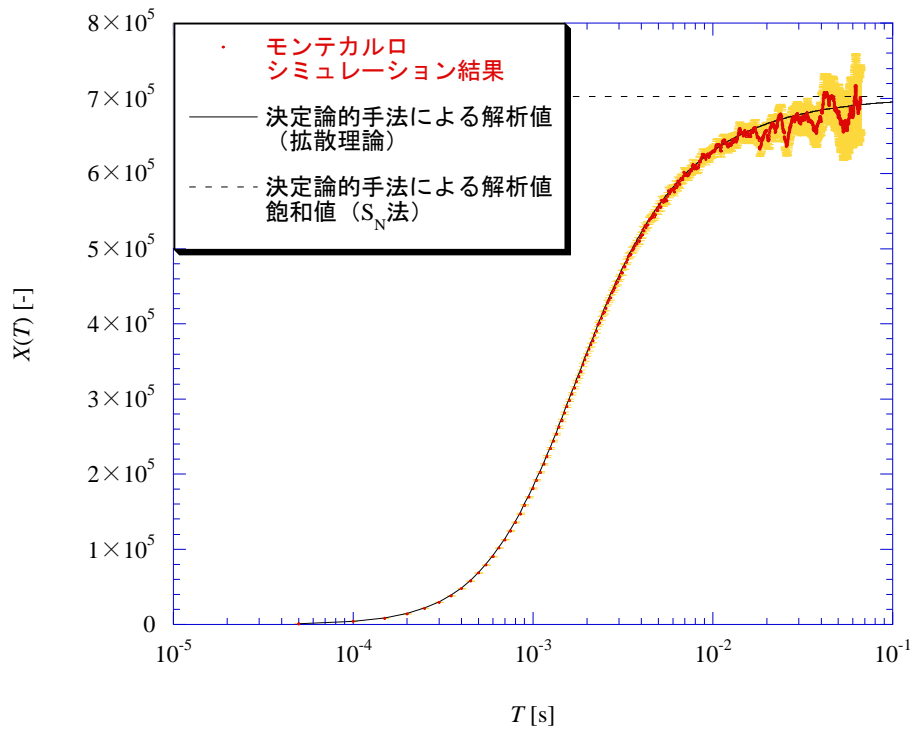


Fig. 5-35 決定論的手法により得られた X 値の計算結果
未臨界体系 2、外部中性子源が体系全体で一様に分布、体系全体で検出

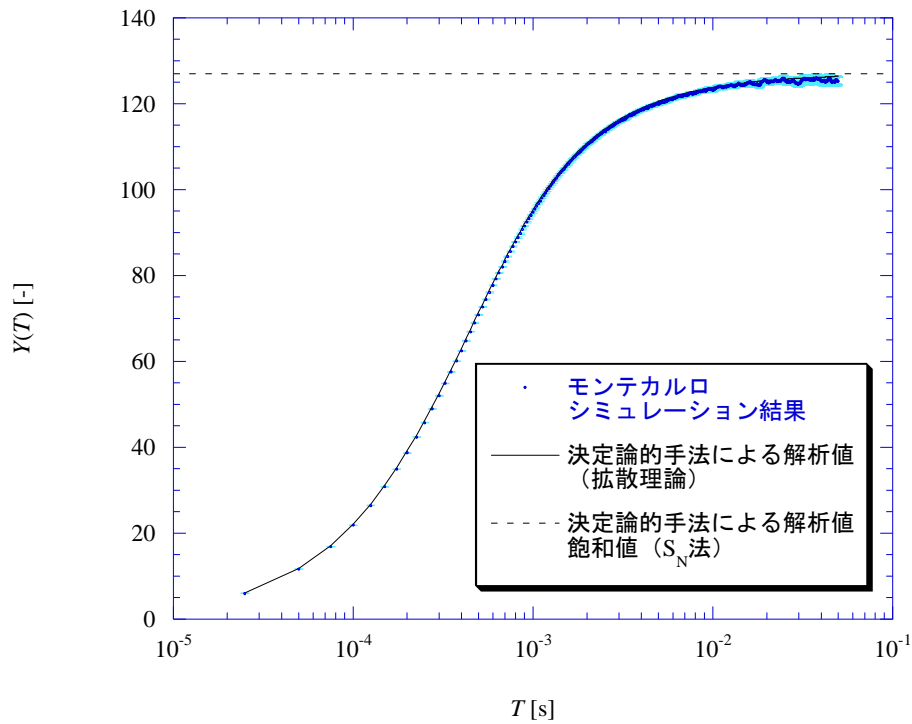


Fig. 5-36 決定論的手法により得られた Y 値の計算結果
未臨界体系 3、外部中性子源が体系全体で一様に分布、体系全体で検出

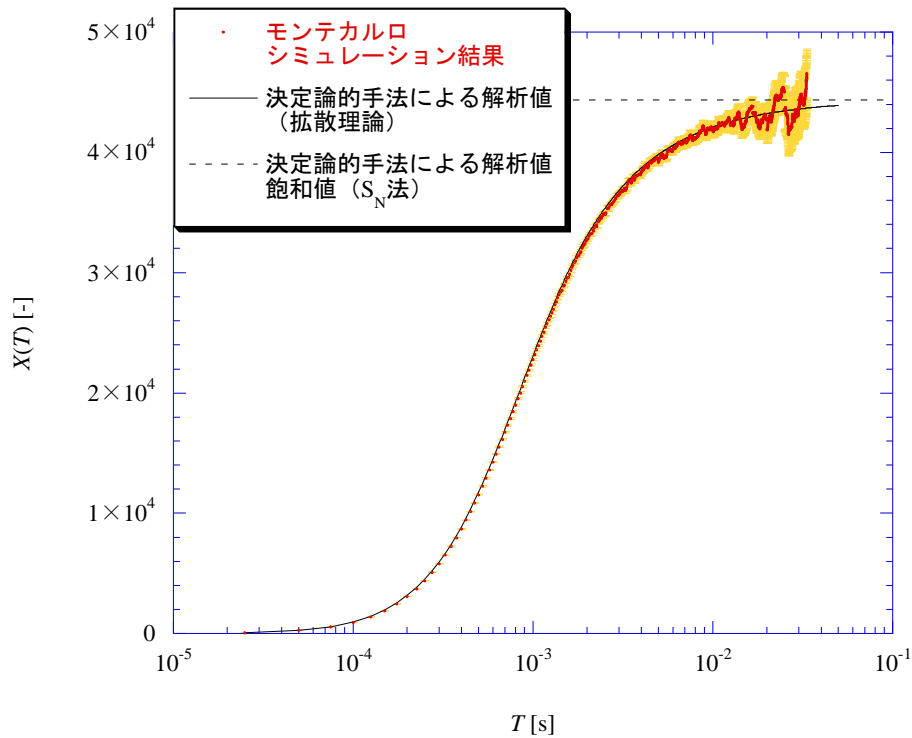


Fig. 5-37 決定論的手法により得られた X 値の計算結果
未臨界体系 3、外部中性子源が体系全体で一様に分布、体系全体で検出

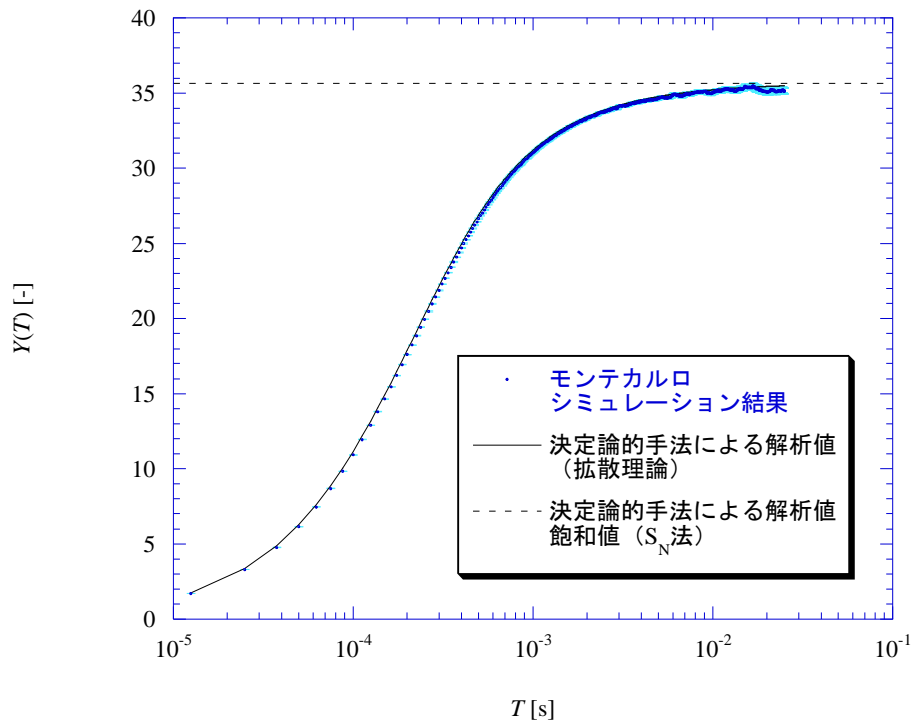


Fig. 5-38 決定論的手法により得られた Y 値の計算結果
未臨界体系 4、外部中性子源が体系全体で一様に分布、体系全体で検出

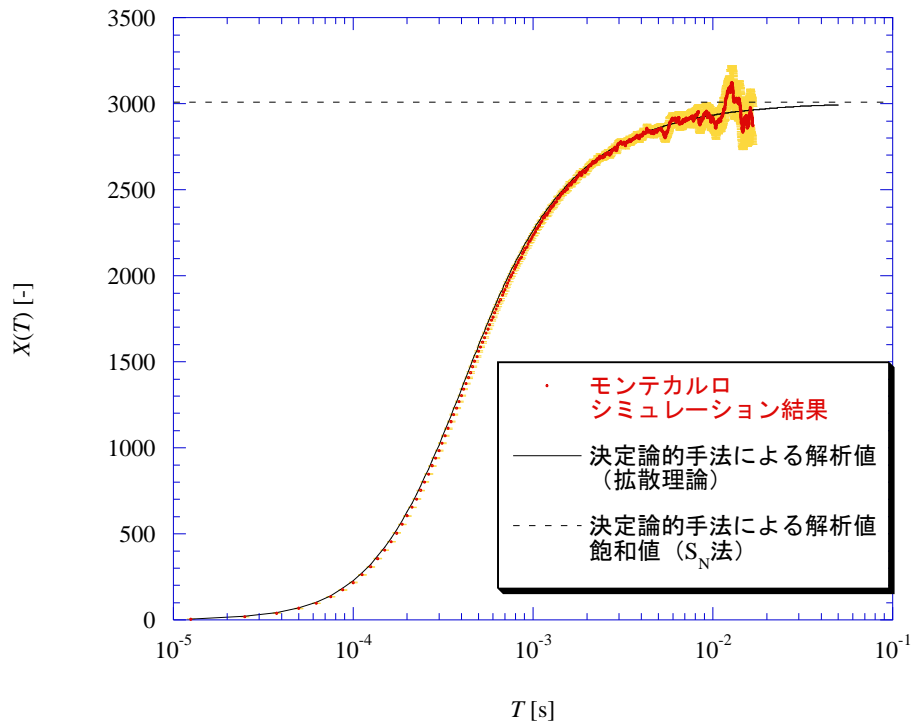


Fig. 5-39 決定論的手法により得られた X 値の計算結果
未臨界体系 4、外部中性子源が体系全体で一様に分布、体系全体で検出

b) Y 、 X 値の飽和値の計算結果

ここでは、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより得られた、 Y 、 X 値の飽和値 Y_{∞} 、 X_{∞} の計算結果を示す。ただし計算条件は以下のものである。

- 1) 厚さ 100 [cm] の平板を 1000 等分のメッシュに分割した。
- 2) 角度変数 μ については 32 分割した。ただし、そのメッシュ点、重みとしてはガウスの積分公式を利用した。
- 3) 外部中性子源強度の空間分布 $S(x)$ として、以下の 4 通りについて計算を行った。
 - i) 体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ分布
 $\psi_0(x)$ としては拡散理論から推定される(5-45)式を利用した。
 - ii) 体系全体で一様に分布
 - iii) 体系の中心位置に点線源
 - iv) 体系の左側境界に点線源
- 4) 検出領域の空間分布として、以下の 3 通りについて計算を行った。
 - a) 体系全体で一様に検出
 - b) 体系の中心 5cm の領域のみで検出
 - c) 体系の左端 5cm の領域のみで検出

検出効率の空間分布を体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じにする条件については計算しない。

以上の条件で、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより得られた Y 、 X 値の飽和値 Y_{∞} 、 X_{∞} の計算結果を、モンテカルロシミュレーションで得られた結果とともに、各未臨界体系 1~4 に対して Table 5-17、Table 5-18 にそれぞれ示す。ただし Table 5-17、Table 5-18 において、モンテカルロシミュレーションで得られた Y 、 X 値の飽和値 Y_{∞} 、 X_{∞} については、 Y 、 X 値のシミュレーション結果に対して(5-85)、(5-86)式をフィッティングことで推定した。Table 5-17、Table 5-18 より、決定論的手法によって得られた Y_{∞} 、 X_{∞} の計算結果は、モンテカルロシミュレーションの結果から推定される飽和値を非常に良く再現しているのが分かる。ただし、体系の左側境界に点線源がある場合、もしくは体系の左端に検出領域がある場合には、モンテカルロシミュレーションと自作の決定論的手法によって得られた Y 、 X 値の結果に若干差があるが、おそらくモンテカルロシミュレーションの統計誤差によるものだと考えられる。

以上より、モンテカルロシミュレーションにより得られた Y 、 X 値の結果を、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより非常に良く再現することができたと考えられる。従って、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを用いて、今回の計算条件において Y 、 X 値に現れる空間依存性の効果を定量的に評価できると考えた。

Table 5-17 決定論的手法により得られた Y_{∞} の計算結果i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	モンテカルロシミュレーション結果			決定論的手法 (S_N 法)		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.25×10^4	1.03×10^3	102	1.25×10^4	1.02×10^3	103
2	513	52.2	9.37	513	52.6	9.44
3	135	16.9	4.37	135	17.1	4.41
4	37.8	6.20	2.25	37.9	6.25	2.25

ii) 体系全体で一様に分布炉心中央に点線源

未臨界体系	モンテカルロシミュレーション結果			決定論的手法 (S_N 法)		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.21×10^4	1.02×10^3	88.7	1.23×10^4	1.04×10^3	90.7
2	485	53.0	7.79	487	53.6	7.86
3	127	17.1	3.88	127	17.2	3.91
4	35.6	6.21	2.23	35.7	6.23	2.23

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	モンテカルロシミュレーション結果			決定論的手法 (S_N 法)		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.30×10^4	907	121	1.31×10^4	912	122
2	568	43.1	11.8	570	43.7	11.9
3	149	15.1	5.11	150	15.3	5.10
4	40.6	6.44	2.16	40.8	6.51	2.16

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	モンテカルロシミュレーション結果			決定論的手法 (S_N 法)		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	9.81×10^3	1.11×10^3	12.9	9.84×10^3	1.12×10^3	12.7
2	247	59.6	2.14	246	62.6	2.15
3	51.8	18.7	1.36	50.9	19.3	1.37
4	11.5	6.06	9.06×10^{-1}	11.4	5.91	9.08×10^{-1}

Table 5-18 決定論的手法により得られた X_{∞} の計算結果i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	モンテカルロシミュレーション結果			決定論的手法 (S_N 法)		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	4.64×10^8	3.02×10^6	2.70×10^4	4.67×10^8	3.05×10^6	2.94×10^4
2	7.38×10^5	6.92×10^3	193	7.50×10^5	7.24×10^3	198
3	4.79×10^4	684	39.4	4.83×10^4	702	40.8
4	3.28×10^3	81.3	9.78	3.30×10^3	83.1	9.82

ii) 体系全体で一様に分布炉心中央に点線源

未臨界体系	モンテカルロシミュレーション結果			決定論的手法 (S_N 法)		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	4.30×10^8	2.90×10^6	2.25×10^4	4.58×10^8	3.10×10^6	2.54×10^4
2	6.96×10^5	7.19×10^3	143	7.02×10^5	7.43×10^3	152
3	4.40×10^4	700	31.6	4.44×10^4	712	33.0
4	2.99×10^3	81.6	8.98	3.01×10^3	83.1	9.06

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	モンテカルロシミュレーション結果			決定論的手法 (S_N 法)		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	4.87×10^8	2.47×10^6	3.36×10^4	4.89×10^8	2.69×10^6	3.57×10^4
2	8.64×10^5	5.29×10^3	270	8.63×10^5	5.67×10^3	279
3	5.64×10^4	544	52.9	5.69×10^4	586	52.2
4	3.75×10^3	77.1	9.82	3.77×10^3	82.2	9.99

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	モンテカルロシミュレーション結果			決定論的手法 (S_N 法)		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	3.51×10^8	3.68×10^6	1.19×10^3	3.64×10^8	3.37×10^6	2.67×10^3
2	3.06×10^5	10.67×10^3	22.4	3.21×10^5	9.08×10^3	25.5
3	1.43×10^4	1052	6.87	1.45×10^4	841	7.55
4	681	110.2	2.47	701	81.5	2.46

5.3.6.4 Y、X 値の空間基本モード成分と高次モード成分の比

ここでは、自作の決定論的 Y、X 値計算プログラムを用いて、今回の計算条件における Y、X 値の空間基本モード成分と高次モード成分の比を求め、Y、X 値に現れる空間高次モードの影響を定量的に評価する。

三次中性子相関法を用いた未臨界度評価法では、Y、X 値の飽和値 Y_∞ 、 X_∞ の比 X_∞/Y_∞^2 を正確に推定することが重要である。特に、本研究で新たに提案した、基本モード近似による三次中性子相関法の場合、この比 X_∞/Y_∞^2 としてできる限り空間基本モード成分のみを抽出する必要がある。しかし、実際には Y、X 値には空間高次モードを完全に排除することはできない。そこで、 X_∞/Y_∞^2 に現れる空間高次モードの影響を定量的に評価するために、 X_∞/Y_∞^2 の空間基本モード成分と空間高次モード成分の比 ω を以下のように定義する。

$$\omega \equiv \left(\frac{X_{\infty,0}}{Y_{\infty,0}^2} \right) / \left(\frac{X_\infty}{Y_\infty^2} \right) = \frac{X_{\infty,0}}{X_\infty} \left(\frac{Y_{\infty,0}}{Y_\infty} \right)^2 \quad (5-111)$$

ただし、上式において Y_∞ 、 X_∞ は空間高次モードの影響を含んだ実際の Y、X 値の飽和値を表し、 $Y_{\infty,0}$ 、 $X_{\infty,0}$ は基本モード成分のみの Y、X 値の飽和値を表す。

Table 5-17、Table 5-18 で示したように、自作の決定論的 Y、X 値計算プログラムにより、空間高次モードの影響まで含めた Y、X 値の飽和値 $Y_{\infty,calc}$ 、 $X_{\infty,calc}$ を計算することができる。

基本モード成分のみによる Y、X 値の飽和値 $Y_{\infty,0}$ 、 $X_{\infty,0}$ については、固有関数展開を利用して導出された Y、X 値の飽和値を利用することで、

$$\frac{X_{\infty,0}}{Y_{\infty,0}^2} = \left(3 \frac{F_{0 \rightarrow 00}}{\alpha_0} \right) / \left(\frac{F_{0 \rightarrow 00}}{\alpha_0} + \frac{S_{00}}{S_0} \right) + \left(\frac{F_{0 \rightarrow 000}}{\alpha_0} + \frac{S_{000}}{S_0} \right) / \left(\frac{F_{0 \rightarrow 00}}{\alpha_0} + \frac{S_{00}}{S_0} \right)^2 \quad (5-112)$$

という関係式を得ることができる。今回の計算条件の場合、上式の各定数は厳密には以下のように表される。

$$S_0 = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu S(x) \langle q \rangle \Psi_0^\dagger(x) \quad (5-113)$$

$$S_{00} = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu S(x) \langle q(q-1) \rangle (\Psi_0^\dagger(x))^2 \quad (5-114)$$

$$S_{000} = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu S(x) \langle q(q-1)(q-2) \rangle (\Psi_0^\dagger(x))^3 \quad (5-115)$$

$$F_{0 \rightarrow 00} = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu v \Sigma_f \psi_0(x, \mu) \langle v(v-1) \rangle (\Psi_0^\dagger(x))^2 \quad (5-116)$$

$$F_{0 \rightarrow 000} = \int_{-50}^{50} dx \int_{-1}^1 d\mu v \Sigma_f \psi_0(x, \mu) \langle v(v-1)(v-2) \rangle (\Psi_0^\dagger(x))^3 \quad (5-117)$$

$$\Psi_0^\dagger(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \psi_0^\dagger(x, \mu) \quad (5-118)$$

ただし $\psi_0(x, \mu)$ 、 $\psi_0^\dagger(x, \mu)$ は以下で表される α 固有値方程式の基本モードの固有値 α_0 に対応する固有関数および随伴固有関数である。

$$\mathbf{B} \psi_0(x, \mu) = \alpha_0 \psi_0(x, \mu) \quad (5-119)$$

$$\mathbf{B}^\dagger \psi_0^\dagger(x, \mu) = \alpha_0 \psi_0^\dagger(x, \mu) \quad (5-120)$$

以上より、 α 固有値方程式の基本モードの固有値 α_0 、固有関数 $\psi_0(x, \mu)$ 、随伴固有関数 $\psi_0^\dagger(x, \mu)$ を数値計算により求めることで、空間基本モードのみの Y、X 値の飽和値の比 $X_{\infty,0,calc}/Y_{\infty,0,calc}^2$ を得る

ことができる。(5-119)、(5-120)式で表される α 固有値方程式を S_N 法により数値計算することで、 α_0 、 $\psi_0(x, \mu)$ 、 $\psi_0^\dagger(x, \mu)$ を求め、(5-112)式により $X_{\infty,0,calc}/Y_{\infty,0,calc}^2$ を計算した。ただし計算条件は以下のものである。

- 1) 厚さ 100 [cm]の平板を 1000 等分のメッシュに分割した。
- 2) 角度変数 μ については 32 分割した。ただし、そのメッシュ点、重みとしてはガウスの積分公式を利用した。

以上で得られた $Y_{\infty,calc}$ 、 $X_{\infty,calc}$ 、および $X_{\infty,0,calc}/Y_{\infty,0,calc}^2$ を用いることで、 X_{∞}/Y_{∞}^2 における空間基本モード成分と空間高次モード成分の比 ω を評価することができる。各未臨界体系 1~4 に対して得られた ω の評価結果を Table 5-19 に示す。Table 5-19 より、体系の未臨界度が浅いほうが、 ω が 1 に近くなる傾向があることが分かる。また ω を 1 にできる限り近くするためには、外部中性子源の空間分布を体系の空間基本モードと同じにし、体系全体で検出を行えば良いことが分かる。それとは逆に、体系の境界に点線源がある場合や、検出領域が体系の端にある場合には、 ω が 1 より離れてしまう。

ω が 1 に近いほど、実際に得られた Y 、 X 値の飽和値が基本モード成分のみの飽和値に近いことを意味する。従って Table 5-19 において、 ω が 1 に近い計算条件の場合、5.3.5.3 で述べた基本モード近似による三次中性子相関法を用いて未臨界度が正しく推定できると考えられる。逆に、 ω が 1 から離れるほど、基本モード近似による三次中性子相関法を用いても、高次モード成分の影響を無視することができないために、未臨界度を正しく評価することができないと考えられる。そういった観点から、Table 5-15、Table 5-16 に示した基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られた未臨界度($-\rho$)の結果を眺めると、 ω が 1 に近いほうが S_N 法により得られた($-\rho$)の解析解に近く、逆に ω が 1 から離れるほど未臨界度を正しく評価できないという傾向を読み取ることができる。ただし、どの程度 ω が 1 に近ければ、基本モード近似による三次中性子相関法をそのまま適用することができるかについては、外部中性子源もしくは検出領域の空間分布に依存するため、議論することが非常に難しい。

Table 5-19 X_{∞}/Y_{∞}^2 における空間基本モード成分と空間高次モード成分の比 ω i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	ω [-]		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	0.9915	1.0178	1.0764
2	0.9835	1.0681	1.2570
3	0.9864	1.0827	1.2446
4	1.0069	0.9316	0.8449

ii) 外部中性子源が体系内全体で一様に分布

未臨界体系	ω [-]		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1.0000	0.9757	1.0326	0.9598
2.0000	0.9513	1.0892	1.1464
3.0000	0.9605	1.0998	1.2261
4.0000	0.9858	1.0908	1.2785

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	ω [-]		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1.0000	1.0275	0.9108	1.2290
2.0000	1.0378	0.9279	1.3972
3.0000	1.0059	1.0191	1.2704
4.0000	0.9621	1.1269	1.0256

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	ω [-]		
	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1.0000	0.7993	1.1232	0.1818
2.0000	0.5738	1.3105	0.5484
3.0000	0.5498	1.3551	0.7668
4.0000	0.5910	1.3547	1.0605

5.3.6.5 高次モード補正因子を利用した三次中性子相関法による未臨界度評価結果

以上より、今回の計算条件において Y 、 X 値に現れる空間依存性の影響を、 X_{∞}/Y_{∞}^2 における空間基本モード成分と空間高次モード成分の比 ω により定量的に評価した。体系の ω が 1 に近くない場合は、空間高次モードによる影響を何らかの形で補正しなければ、基本モード近似による三次中性子相関法をそのまま用いても未臨界度を正しく評価することができないと考えられる。

そこで、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムにより評価された ω (Table 5-19) を高次モード補正因子として用いることにより、本研究で提案した基本モード近似による三次中性子相関法を用いた未臨界度の評価結果を改善できるのではないかと考えた。具体的には、三次中性子相関法の解析式において、 ω を補正因子として以下のように利用する。

$$\omega \frac{X_{\infty}}{Y_{\infty}^2} = \frac{3}{1 + \delta_{2,0}(-\rho)} + F_0 \frac{\{1 + \delta_{3,0}(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_{2,0}(-\rho)\}^2} \quad (5-121)$$

ただし上式における Y_{∞} 、 X_{∞} は空間高次モードの影響を含んだ実際の Y 、 X 値の飽和値を表す。上式のように高次モード補正因子 ω を加えることで、 Y_{∞} 、 X_{∞} から高次モードの影響を排除することができ、基本モード近似による三次中性子相関法を適用できるのではないかと考えた。

Table 5-19 に示した ω を高次モード補正因子として利用して、モンテカルロシミュレーションで得られた Y 、 X 値を解析しなおした。ここで Y 、 X 値の解析は、5.3.5.1 で述べた方法と同様に、 Y 、 X 値のモンテカルロシミュレーション結果に対して解析式(5-85)、(5-86)式を最小二乗法によりフィッティングすることで行った。ただしフィッティングする際に、以下のように高次モード補正因子 ω を利用した。

$$X_{2\infty} = \frac{3}{1 + \delta_{2,0}(-\rho)} \frac{Y_{\infty}^2}{\omega} \quad (5-122)$$

$$X_{3\infty} = F \frac{\{1 + \delta_{3,0}(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_{2,0}(-\rho)\}^2} \frac{Y_{\infty}^2}{\omega} \quad (5-123)$$

上式を用いて、解析式のフィッティングパラメーターを α 、 Y_{∞} 、 $(-\rho)$ の 3 つだけにし、 Y 、 X 値のシミュレーション結果を同時にフィッティングすることで未臨界度 $(-\rho)$ を直接評価した。また上式の定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 としては S_N 法から求められた値 (Table 5-10) を利用した。

こうして得られた、高次モード補正因子 ω を利用した三次中性子相関法による未臨界度評価結果を Table 5-20 に示す。Table 5-20 で示した未臨界度 $(-\rho)$ の結果と、Table 5-16 に示した基本モード近似による三次中性子相関法をそのまま用いて得られた結果を比較することで、以下のことが分かる。

- 1) 高次モード補正因子 ω を利用することで、 S_N 法により得られた解析値により近い未臨界度を評価することができた。
- 2) 各未臨界体系に対して、得られた未臨界度 $(-\rho)$ の大小関係が逆転するということがなくなった。
- 3) しかし、検出領域が体系の端にある場合や、特に体系の境界に点線源がある場合には、未臨界度の評価結果を改善できたとはいえ、 S_N 法により得られた解析解との差が大きい。

Table 5-20 高次モード補正因子 ω を利用した三次中性子相関法を用いて得られた未臨界度 $(-\rho)$ i) 外部中性子源強度の空間分布が体系の空間基本モードの固有関数 $\psi_0(x)$ と同じ

未臨界体系	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]			
	解析解(S_N 法)	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	1.55 ± 0.08	1.73 ± 0.08	4.76 ± 0.09
2	5.26	6.36 ± 0.04	7.72 ± 0.04	6.19 ± 0.05
3	11.11	11.29 ± 0.03	11.94 ± 0.04	12.53 ± 0.05
4	25.00	25.01 ± 0.03	25.67 ± 0.04	24.20 ± 0.07

ii) 外部中性子源が体系内全体で一様に分布

未臨界体系	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]			
	解析解(S_N 法)	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	3.9 ± 0.1	3.9 ± 0.1	7.7 ± 0.1
2	5.26	5.30 ± 0.05	5.83 ± 0.05	8.58 ± 0.06
3	11.11	11.50 ± 0.04	11.42 ± 0.04	13.10 ± 0.06
4	25.00	25.48 ± 0.03	25.89 ± 0.05	25.47 ± 0.07

iii) 体系の中心位置に点線源

未臨界体系	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]			
	解析解(S_N 法)	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	0.90 ± 0.06	1.55 ± 0.07	2.84 ± 0.07
2	5.26	4.64 ± 0.03	8.35 ± 0.04	5.82 ± 0.05
3	11.11	10.77 ± 0.03	14.85 ± 0.03	10.22 ± 0.06
4	25.00	25.18 ± 0.03	29.19 ± 0.04	25.9 ± 0.2

iv) 体系の左側境界に点線源

未臨界体系	$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]			
	解析解(S_N 法)	体系全体検出	体系中央検出	体系左端検出
1	1.01	0 ± 1	0 ± 1	0.0 ± 0.9
2	5.26	0.4 ± 0.6	5.4 ± 0.9	0.0 ± 0.3
3	11.11	5.5 ± 0.4	10 ± 1	0.0 ± 0.3
4	25.00	17.3 ± 0.3	70 ± 3	4.3 ± 0.3

以上より、高次モード補正因子 ω を利用することにより、実際に得られた Y_{∞} 、 X_{∞} から高次モードの影響を排除することができ、基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られる未臨界度の評価結果を改善することができたと考えられる。

5.4 本章のまとめ

本章で得られた結果、結論を以下に示す。

- 1) 自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムを利用することで、標本分散および標本三次モーメントを用いて Y 、 X 値を推定した場合には、データ数の有限性の効果が大きく現れることが分かった。
- 2) また不偏分散および不偏三次モーメントを用いて Y 、 X 値を推定した場合には、データ数の有限性の効果をほとんど排除することができることが分かった。
- 3) 第3章で述べた、データ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を用いて解析を行えば、 Y 、 X 値の飽和値 Y_{∞} 、 X_{∞} を正しく推定することができるため、三次中性子相関法により未臨界度 $(-\rho)$ を正しく評価することができることが分かった。
- 4) さらに、不偏分散および不偏三次モーメントを用いて Y 、 X 値を推定した場合には、データ数を無限とした従来の Y 、 X 値の理論式を用いて解析を行ったとしても、三次中性子相関法により未臨界度を十分に評価できることが分かった。
- 5) 自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムを利用して、1次元平板体系の計算を行うことで、従来の1点炉近似による三次中性子相関法では、体系の空間依存性の影響により未臨界度を正しく評価することができないことが分かった。ただし外部中性子源の空間分布や検出効率の空間分布を、体系の空間基本モードを同じにすることで、従来の1点炉近似でも未臨界度を評価することができた。
- 6) 本研究で新たに提案した、基本モード近似による三次中性子相関法をそのまま用いても、未臨界度をそれほど正しくは評価できなかった。この原因は、空間高次モードの影響を完全に排除することはできないためだと分かった。
- 7) そこで、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを用いて、 Y 、 X 値の飽和値 X_{∞}/Y_{∞}^2 における空間基本モード成分と高次モード成分の比 ω を計算し、 Y 、 X 値に現れる空間高次モードの影響を定量的に評価した。その結果 ω が1に近いほうが S_N 法により得られた $(-\rho)$ の解析解に近く、逆に ω が1から離れるほど未臨界度を正しく評価できないという傾向が分かった。
- 8) こうして評価された ω を、高次モード補正因子として利用することで、実際に得られた Y_{∞} 、 X_{∞} から高次モードの影響を排除することができ、基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られる未臨界度の評価結果を改善することができた。

Chapter 6

結論

6.1 結論

本研究で得られた結論を以下に示す。

- 1) 三次中性子相関法に現れるデータ数の有限性の効果を検討するために、データ数の有限性を考慮に入れた二次相関量 Y 、三次相関量 X 値の理論式を新たに導出した。
- 2) 標本分散および標本三次モーメントを用いて Y 、 X 値を評価した場合には、データ数の有限性の効果が大きく現れ、データ数を無限とした従来の Y 、 X 値の解析式を用いることができないことが分かった。従って、本研究で導出したデータ数の有限性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を用いて解析を行う必要があることが分かった。
- 3) 不偏分散および不偏三次モーメントを用いて Y 、 X 値を評価した場合には、データ数の有限性の効果をほとんど排除することができることが分かった。特に、データ数に依存することなく、検出時間幅 $T \rightarrow \infty$ における Y 、 X 値の飽和値が正しく推定できることが分かった。この場合には、データ数を無限とした従来の Y 、 X 値の解析式を用いて解析を行っても、三次中性子相関法により未臨界度を十分に評価できることを、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションを用いて確認した。
- 4) 三次中性子相関法に現れる空間依存性の効果を検討するために、空間・中性子エネルギー・方向依存性を考慮に入れた Y 、 X 値の理論式を、固有関数展開を利用して新たに導出した。
- 5) 固有関数展開を利用して導出された Y 、 X 値の理論式を用いることで、空間・中性子エネルギー・方向依存性について基本モード成分を考慮に入れた、新たな三次中性子相関法を提案した。
- 6) 中性子検出確率のバランス方程式に基づいて、空間・中性子エネルギー・方向依存性および遅発中性子を考慮に入れた Y 、 X 値の一般理論を導出した。
- 7) こうして得られた Y 、 X 値の一般理論を用いることで、決定論的手法により Y 、 X 値を数値計算できることが分かった。この理論を用いて、本研究では決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを作成した。自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムにより得られた Y 、 X 値の計算結果と比較することで、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムの妥当性を検証した。
- 8) 自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムを利用して、1次元平板体系の計算を行うことで、従来の1点炉近似による三次中性子相関法では、体系の空間依存性の影響

により未臨界度を正しく評価することができないことが分かった。また、本研究で新たに提案した、基本モード近似による三次中性子相関法をそのまま用いても、未臨界度をそれほど正しくは評価できなかった。この原因は、空間高次モードの影響を完全に排除することはできないためだと分かった。

- 9) そこで、自作の決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを用いて、 Y 、 X 値の飽和値 X_{∞}/Y_{∞}^2 における空間基本モード成分と高次モード成分の比 ω を計算し、こうして評価された ω を、高次モード補正因子として利用することを考案した。これにより実際に得られた Y_{∞} 、 X_{∞} から高次モードの影響を排除することができ、基本モード近似による三次中性子相関法を用いて得られる未臨界度の評価結果を改善することができた。

6.2 今後の課題

今後の課題について以下に示す。

- 1) Appendix A において京都大学臨界集合体実験装置で行った三次中性子相関法の実験結果を示すが、現時点では空間依存性を全く考慮していないため、未臨界度を正しく測定できないという結果になっている。従って、実際の実験に対して、本研究で新たに提案した基本モード近似による三次中性子相関法を適用し、三次中性子相関法を用いた未臨界度評価結果を改善できるか検討を行う必要がある。
- 2) そのためには、本研究で導出した Y 、 X 値の一般理論を用いて、三次元決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを作成する必要がある。
- 3) 未臨界度 ($-\rho$) は体系の基本モードに対して定義される量である。従って本研究では、基本モード成分のみでなく高次モード成分も含んだ実際の Y 、 X 値の測定結果から、基本モードの固有値に対応する未臨界度 ($-\rho$) の情報を得ようと検討を行ってきた。むしろ高次モード成分まで含めた未臨界度というものを新たに提案することで、三次中性子相関法をより見通しのよい測定手法にできないかと考えている。

参考文献

- [1] 代谷誠治, "動特性測定手法を用いた未臨界度モニターの開発," 平成6年度科学研究補助金(試験研究(B)(1)) 研究成果報告書, (1995).
- [2] 溝尾宣辰, "大きな負の反応度の測定に関する研究," JAERI-M 7753, (1978).
- [3] T. Suzaki, "Subcriticality determination of low-enriched UO₂ lattices in water by exponential experiment," J. Nucl. Sci. Technol., **28**[12], 1067-1077 (1991).
- [4] B.E. Simmons and J. S. King, "A pulsed neutron technique for reactivity determination," Nucl. Sci. Eng., **3**, 595-608 (1958).
- [5] N. G. Sjöstrand, "Measurement on a subcritical reactor using a pulsed neutron source," Arkiv för Fysic, **11**, 233-246 (1956).
- [6] F. de Hoffmann, "Statistical aspects of pile theory," The Science and Engineering of Nuclear Power, Vol. II, Chap. 9, Addison-Wesley Press Inc., Cambridge, Massachusetts (1949).
- [7] R. P. Feynman, F. de Hoffmann and R. Serber, "Dispersion of the neutron emission in U-235 fission," J. Nucl. Energy, **3**, 64-69 (1956).
- [8] J. T. Mihalczo, V. K. Paré and G. L. Ragan, "Determination of reactivity from power spectral density measurements with californium-252," Nucl. Sci. Eng., **66**, 29-59 (1978).
- [9] A. Furuhashi and A. Izumi, "Third moment of the number of neutrons detected in short time intervals," J. Nucl. Sci. Technol., **5**[2], 48-59 (1968).
- [10] B. C. Diven, H. C. Martin, R. F. Taschek and J. Terrell, "Multiplicities of fission neutrons," Phys. Rev., **101**[3], 1012-1015 (1955).
- [11] 遠藤知弘, "高次相関を用いた未臨界度絶対評価法の検討," 名古屋大学卒業論文, (2002).
- [12] 河本慎也, "未臨界実験によるボイド反応度測定法の研究," 名古屋大学大学院修士論文, (2002).
- [13] J. J. Duderstadt, L. J. Hamilton 著, 成田邦雅, 藤田文行 共訳, "原子炉の理論と解析(上)," 現代工学社, (1994).
- [14] J. D. Orndoff, "Prompt neutron periods of metal critical assemblies," Nucl. Sci. Eng., **2**, 450-460 (1957).
- [15] M. M. R. Williams 著, 斎藤慶一, 西原英晃, 大塚益比古 共訳, "原子炉の確率過程," みすず書房, (1978).
- [16] 斎藤慶一, "炉雑音の理論 (I)," JAERI 1187, (1969).
- [17] J. B. Dragt, "Threefold correlations and third order moments in reactor noise," Nukleonik, **10**, 7-13 (1967).

- [18] M. Otsuka and K. Saito, "Space-time correlations in neutron distributions in a multiplying medium," J. Nucl. Sci. Technol., **2**[5], 191-198 (1965).
- [19] M. Otsuka and T. Iijima, "Space-dependent formula for Rossi- α measurements," Nukleonik, **7**, 488-491, (1965).
- [20] S. Ukai, S. Takeda and S. Yamada, "A generalized analysis of Rossi- α experiment," J. Nucl. Sci. Technol., **2**[9], 355-362 (1965).
- [21] E. J. M. Wallerbos and J. E. Hoogenboom, "The forgotten effect of the finite measurement time on various noise analysis techniques," Ann. Nucl. Energy, **25**, 733-746 (1998).
- [22] Y. Kitamura, T. Endo, Y. Yamane, T. Misawa and H. Unesaki, "Absolute measurement of the subcriticality by using the third order moment of the number of neutrons detected," PHYSOR 2002, Seoul, Korea, October 7-10 (2002).
- [23] T. Endo, Y. Kitamura and Y. Yamane, "Absolute measurement of the subcriticality based on the third order neutron correlation in consideration of the finite nature of neutron counts data," ICNC2003, JAERI-Conf 2003-019(Part I), 215-220 (2003).
- [24] G. I. Bell, "On the stochastic theory of neutron transport," Nucl. Sci. Eng., **21**, 390-401 (1965).
- [25] I. Pázsit, "The backward theory of stochastic particle transport with multiple emission source," Physica Scripta, **59**, 344-351 (1999).
- [26] 森貴正, 中川正幸, "MVP/GMVP 連続エネルギー法および多群法に基づく汎用中性子・光子輸送計算コード," JAERI-Data/Codes 94-007 (1994).
- [27] 本山聡, "炉雑音解析における中性子源強度依存性のモンテ・カルロ法による検討," 名古屋大学卒業論文, (1988).
- [28] 中川徹, 小柳義夫, "最小二乗法による実験データ解析," 東京大学出版会, (1999).
- [29] 小林啓祐, "原子炉物理," コロナ社 (1996).
- [30] 登坂宣好, 大西和榮, "偏微分方程式の数値シミュレーション [第2版]," 東京大学出版会, (2003).
- [31] 花坂宏幸, "中性子相関法を用いた Diven 因子の測定法," 名古屋大学卒業論文, (2002).
- [32] R. Gwin, R. R. Spencer and R. W. Ingle, "Measurements of the energy dependence of prompt neutron emission from ^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu , and ^{241}Pu for $E_n = 0.005$ to 10 eV relative to emission from spontaneous fission of ^{252}Cf ," Nucl. Sci. Eng., **87**, 381-404 (1984).
- [33] M. Matsumoto and T. Nishimura, "Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform, pseudorandom number generator," <http://www.math.keio.ac.jp/~matumoto/mt.html>.
- [34] 奥村啓介, 金子邦夫, 土橋敬一郎, "SRAC95; 汎用核計算コードシステム," JAERI-Data/Codes 96-015, (1996).

Appendix A

京都大学臨界集合体実験装置における 三次中性子相関法による未臨界度測定実験

A.1 目的

ここでは京都大学臨界集合体実験装置（KUCA）で行った、三次中性子相関法による未臨界度測定実験の結果について述べる。

本研究で得られた結論より、不偏分散および不偏三次モーメントを用いて Y 、 X 値を評価することで、 Y 、 X 値の測定値に現れるデータ数の有限性の効果については排除することができた。

しかし、現時点では三次中性子相関法による未臨界度評価の際に、空間依存性の効果を考慮することができなかった。空間依存性の効果を三次中性子相関法に考慮するためには、三次中性子相関法で用いる定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 、および高次モード補正因子 ω を数値計算により求める必要がある。しかし現時点では、実際の三次元の測定体系に対するこれらの定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 、 ω を計算するための、三次元決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを作成することができなかった。

空間依存性を考慮できていない不十分な解析ではあるが、現在の問題点を把握するため KUCA で行った三次中性子相関法による未臨界度測定実験の結果について以下で示すことにする。

A.2 実験の概要

1) 日程

2002年6月25日（火）～ 28日（金）

2) 実験体系

今回の実験では KUCA の A 架台を使用した。この A 架台で構成した A3/8"P36EU(3)炉心の水平断面図を Fig. A-1 に示す。また、燃料集合体および Cf 線源を入れた燃料集合体の構成図を Fig. A-2、Fig. A-3 に示す。この実験体系では、炉心の中央位置（そ 15）に直径 1 インチ穴あきポリエチレン体を挿入し、そこに直径 1 インチの BF_3 検出器を炉心中央位置に配置することで、中性子の検出を行った。また、外部中性子源として Cf 自発核分裂中性子源を使用し、線源ができる限り炉心の中央位置になるように、つ 15 の位置の燃料集合体において Fig. A-3 で示したように線源を配置した。

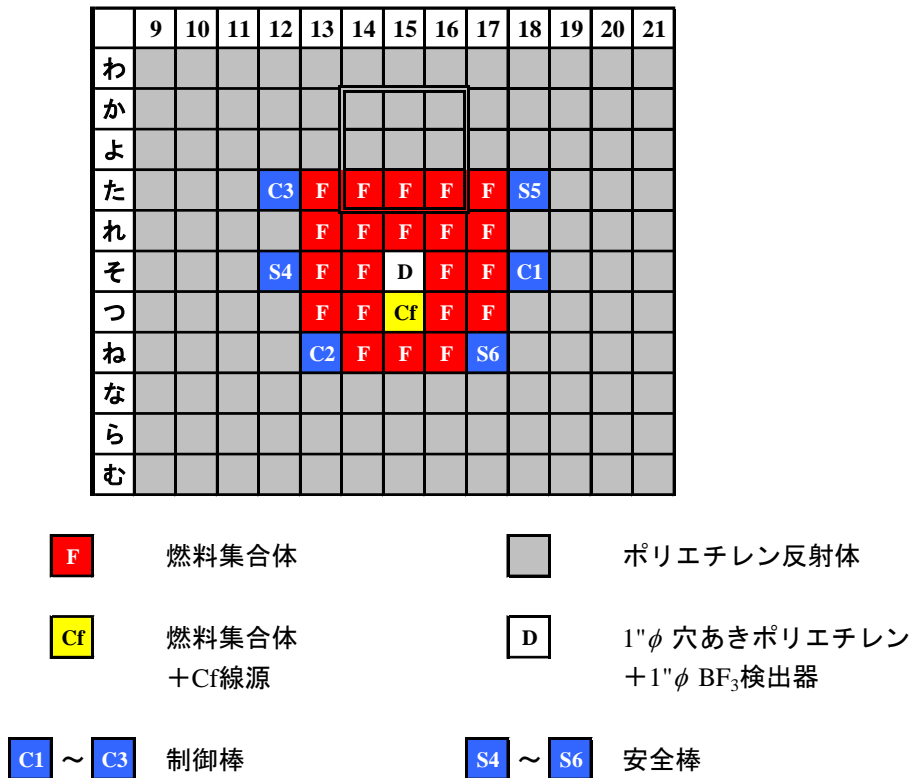


Fig. A-1 A3/8"P36EU(3)炉心の水平断面図 (2002年6月)

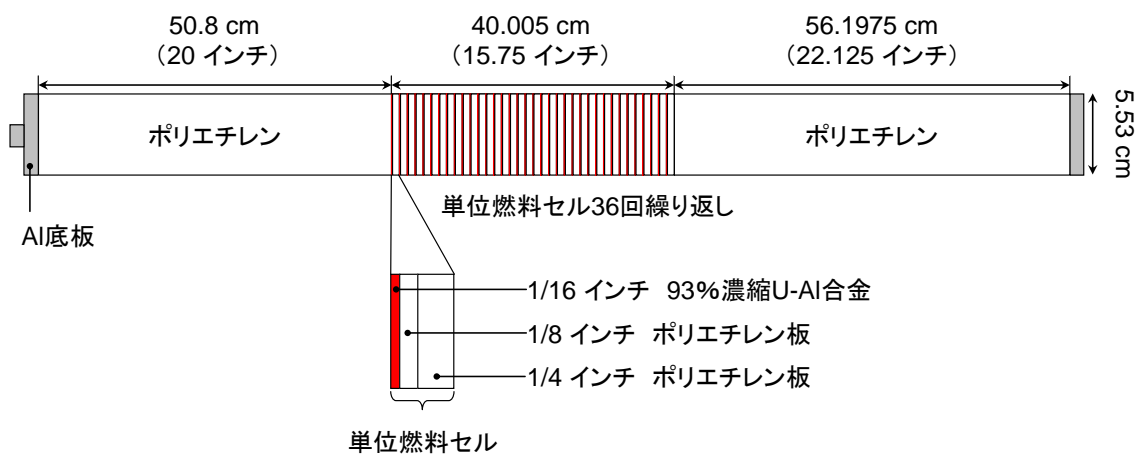


Fig. A-2 燃料集合体の構成図

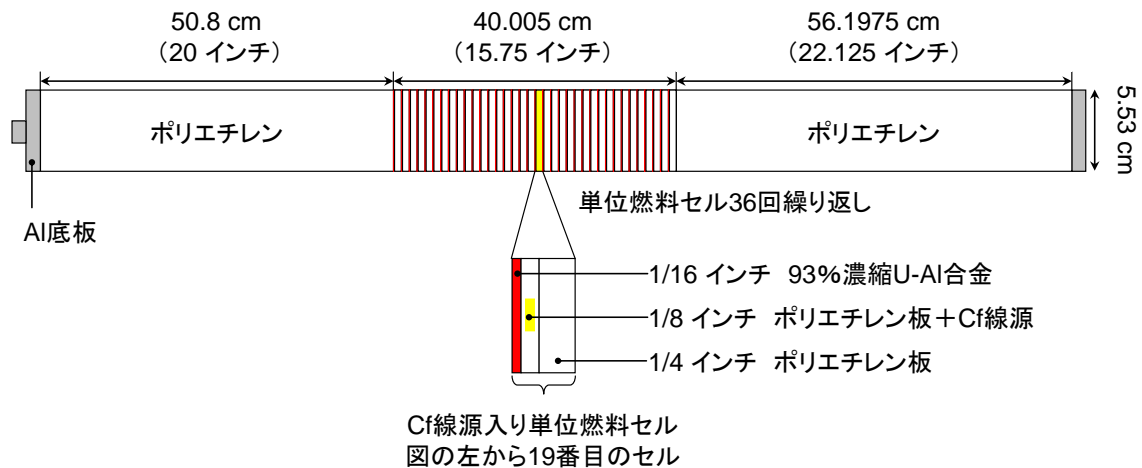


Fig. A-3 Cf線源を入れた燃料集合体の構成図

体系に6本ある制御棒および安全棒を挿入することで、4通りの未臨界体系を構成した。これら4通りの未臨界体系の制御棒パターンをTable A-1に示す。ただしTable A-1には、各未臨界体系に対する未臨界度 $(-\rho)$ 、即発中性子減衰定数 α の参照値も示しておく。未臨界体系1、2、3については、過去に同様の体系に対してパルス中性子法により測定された $(-\rho)$ 、 α の値を参照値とした^{[1], [31]}。また未臨界体系2'については、未臨界体系2と同じ未臨界度にするために、未臨界体系2と計数率が等しくなるようにに6本の制御棒全てを約50%挿入した。なお三次中性子相関法による測定は、できる限り対称体系のほうが空間依存性の影響が少ないと考え、未臨界体系1、2'、3について測定を行った。

Table A-1 各未臨界体系における制御棒パターンおよび

未臨界体系	制御棒パターン	参照値	
		$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]	α [1/s]
1	C1~C3、S3~S4全引抜	1.3	391
2	C1~C3全挿入、S3~S4全引抜	2.7	732
2'	C1~C3、S3~S4約50%挿入	2.7	732
3	C1~C3、S3~S4全挿入	4.5	1118

3) 中性子検出数の時系列データの測定法

まず、BF₃検出器で得られた検出信号をプリアンプに入力し、そのプリアンプ出力をメインアンプに入力した。こうして得られたメインアンプ出力をシングルチャンネルアナライザーに入力し、ガンマ線の相互作用や電子回路雑音等のパルス波高をカットすることで、中性子検出信号の

みを拾った。こうしてシングルチャンネルアナライザーにより得られた中性子検出信号の出力を、マルチチャンネルスケーラーに入力し、中性子検出数の時系列データを測定した。各未臨界体系に対する、マルチチャンネルスケーラーのチャンネル数と基本ゲート幅 T_0 の設定値、および測定した時系列データの sweep 数を Table A-2 に示す。

Table A-2 各未臨界体系におけるマルチチャンネルスケーラーの設定値および sweep 数

未臨界体系	チャンネル数	基本ゲート幅 T_0 [μ s]	sweep数
1		250	2000
2'	8192	100	8000
3		100	12000

A.3 Y、X 値の測定結果

測定により得られた中性子検出数の時系列データについて、バンチング処理を用いて Y、X 値を評価した。ここで、1sweep ごとに中性子検出数の平均、不偏分散、不偏三次モーメントを推定した。こうして 1sweep ごとに得られた中性子検出数の平均、不偏分散、不偏三次モーメントの全 sweep 数に対する平均を求め、最終的に Y、X 値を評価した。

未臨界体系 1、2'、3 に対して得られた Y、X 値の測定結果をそれぞれ Fig. A-4 から Fig. A-9 に示す。Fig. A-4 から Fig. A-9 より、不偏分散および不偏三次モーメントを用いて Y、X 値を評価することで、検出時間幅 T が大きくなっても Y、X 値が落ち込むことなく飽和することが分かる。従って、Y、X 値に現れるデータ数の有限性の効果については排除することができたと言える。

Fig. A-4 から Fig. A-9 より、Y 値の測定結果については非常に統計精度の良い結果を得ることができたと考えられる。しかし X 値の測定結果については、特に検出時間幅 T が大きくなるにつれて、測定で得られた X 値の統計誤差が非常に大きくなる。

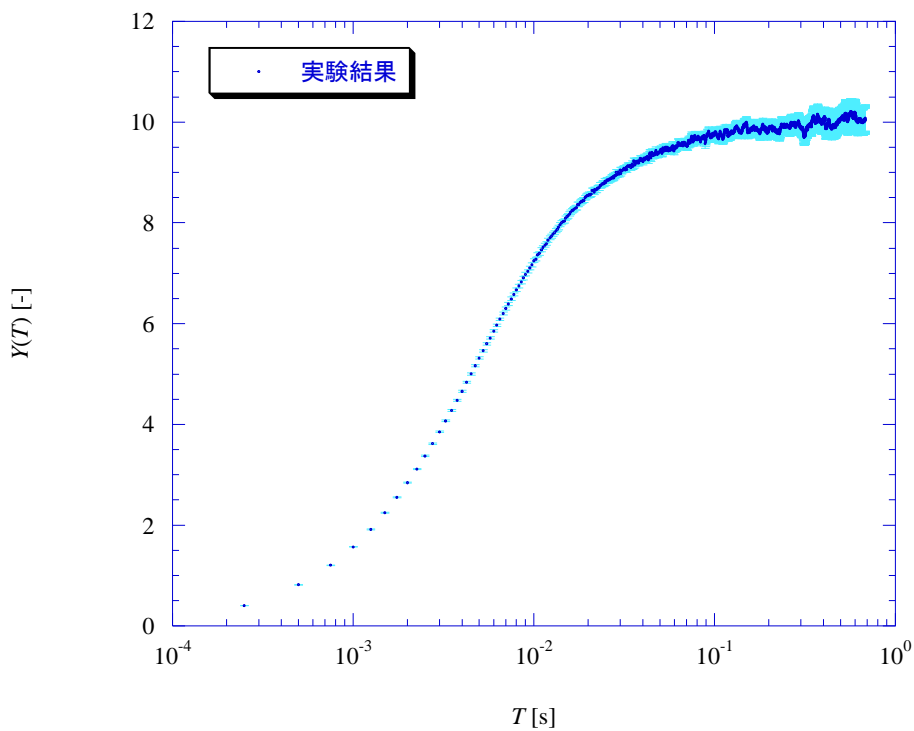


Fig. A-4 未臨界体系 1 における Y 値の測定結果

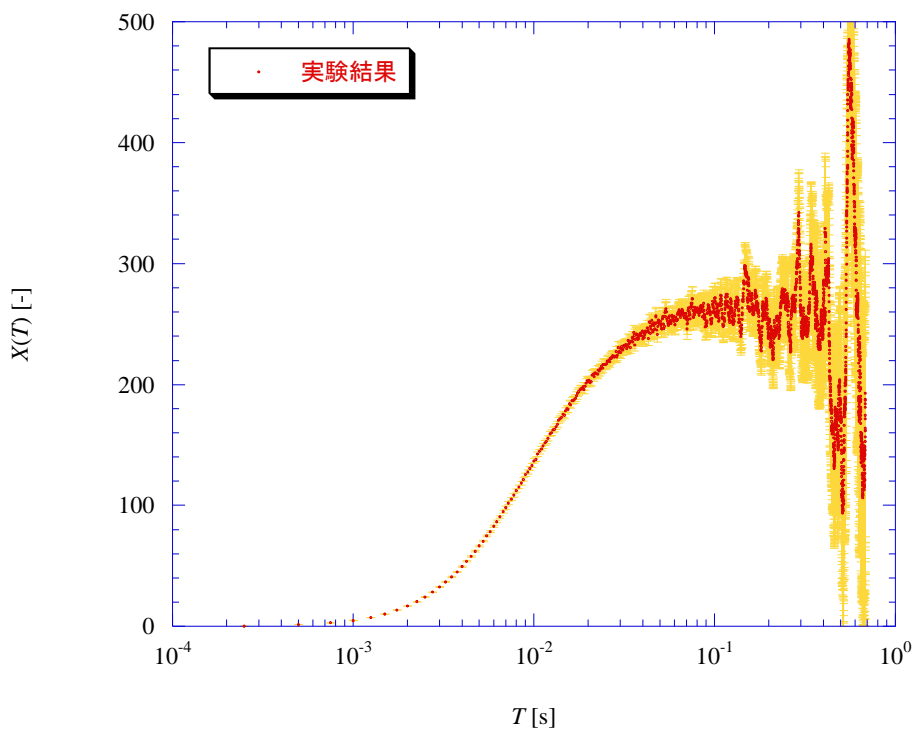


Fig. A-5 未臨界体系 1 における X 値の測定結果

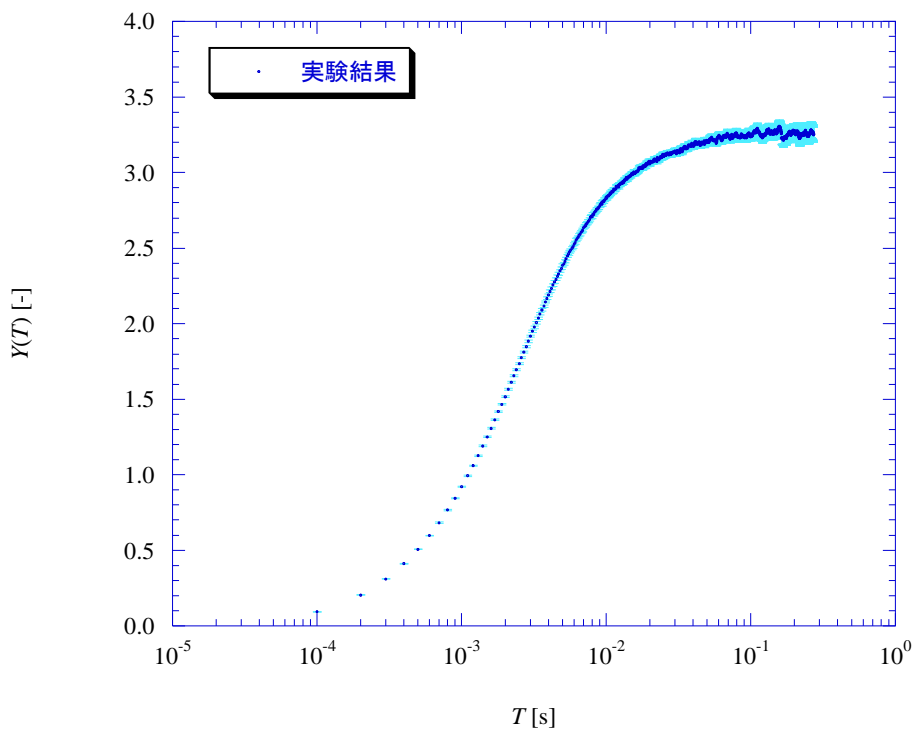


Fig. A-6 未臨界体系 2'における Y 値の測定結果

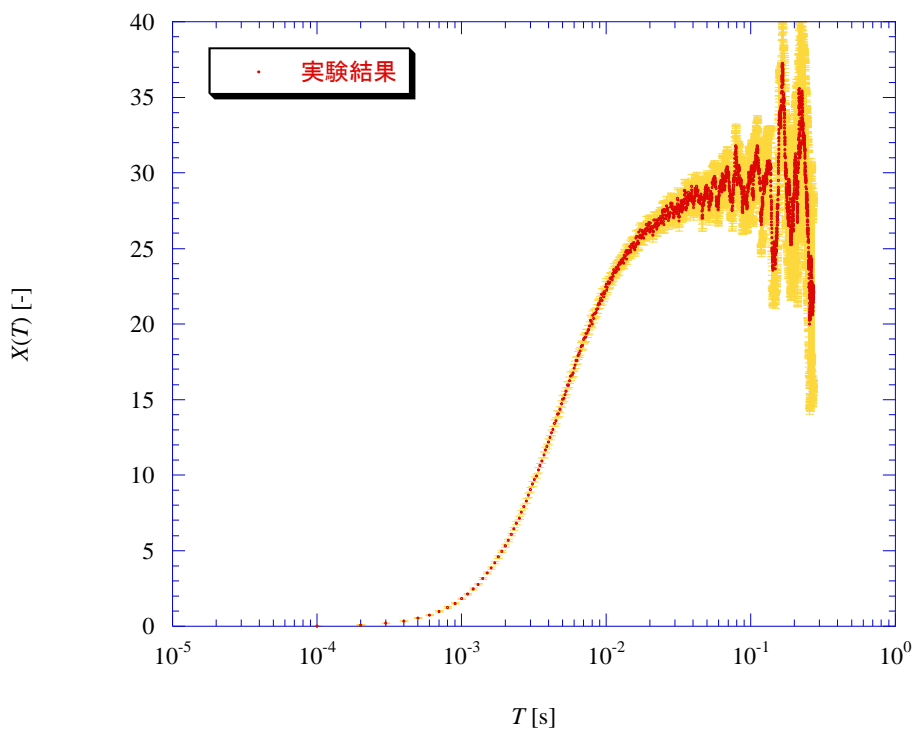


Fig. A-7 未臨界体系 2'における X 値の測定結果

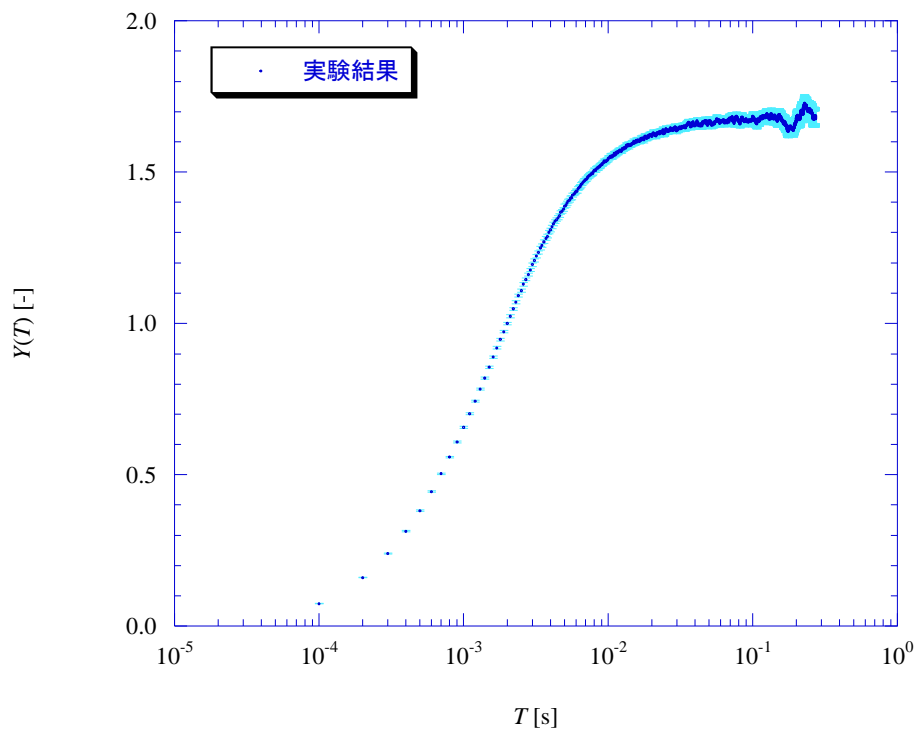


Fig. A-8 未臨界体系 3 における Y 値の測定結果

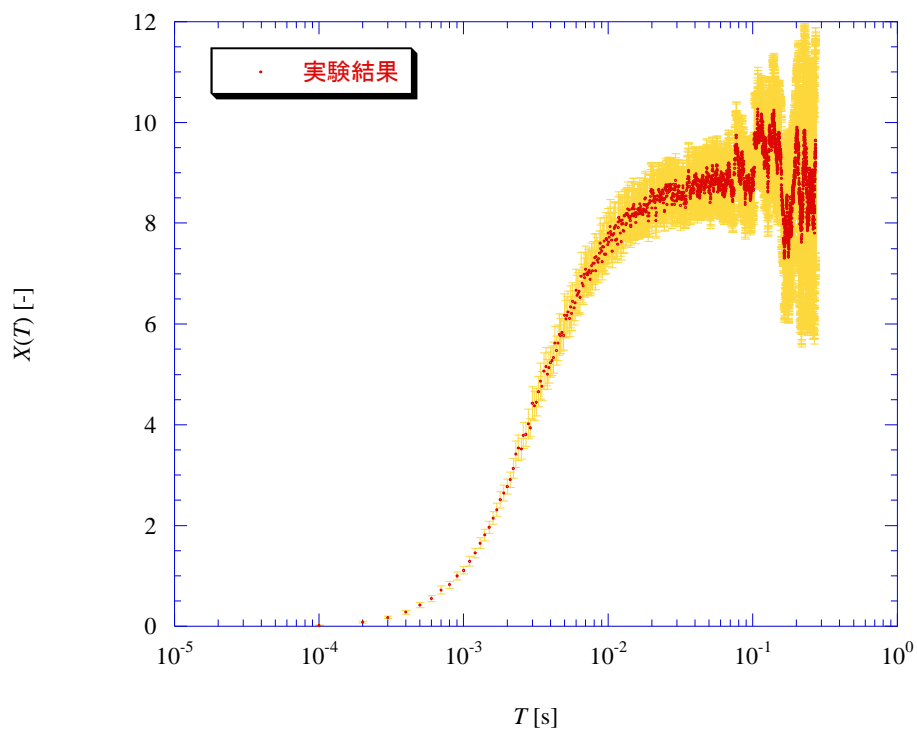


Fig. A-9 未臨界体系 3 における X 値の測定結果

A.4 三次中性子相関法による未臨界度評価結果

Fig. A-4 から Fig. A-9 で示した Y , X 値を解析することで、三次中性子相関法により未臨界度を評価した。三次中性子相関法により未臨界度を正しく評価するには、空間依存性の効果を十分考慮する必要があるが、三次元決定論的 Y, X 値計算プログラムを作成することができなかつたので、今回の解析は空間依存性の効果を考慮しない 1 点炉近似で行うことにした。

1 点炉近似の場合、三次中性子相関法で用いる定数 δ_2 , δ_3 , F は以下のように求められる。

$$\delta_2 \cong \frac{\langle \nu \rangle \langle q(q-1) \rangle}{\langle q \rangle \langle \nu(\nu-1) \rangle} \quad (\text{A-1})$$

$$\delta_3 \cong \frac{\langle \nu \rangle \langle q(q-1)(q-2) \rangle}{\langle q \rangle \langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle} \quad (\text{A-2})$$

$$F \cong \frac{\langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle \langle \nu \rangle}{\langle \nu(\nu-1) \rangle^2} \quad (\text{A-3})$$

今回の実験の場合、上式における ν は ^{235}U の 1 核分裂反応当りに発生する中性子数、 q は ^{252}Cf の 1 核分裂反応当りに発生する中性子数を表す。定数 δ_2 , δ_3 , F を求めるためには、 ^{235}U および ^{252}Cf の 1 核分裂反応当りに発生する中性子数 n の確率分布 $P(n)$ が必要となる。これらの確率分布の文献値として、今回の解析では R. Gwin により測定された結果を用いることにした^[32]。R. Gwin による測定値を用いた理由として、以下の点が挙げられる。

- 1) 熱中性子 ($E = 0.005 \sim 10 \text{ eV}$) に対する ^{235}U の 1 核分裂反応当りに発生する中性子数 n の確率分布 $P(n)$ が評価されている。今回の実験体系はポリエチレンで減速されるので、中性子のエネルギースペクトルにおける熱中性子の割合が多いと考えられる。従って、 ^{235}U の $P(n)$ として熱中性子に対する測定値を用いることが適切であると考えた。
- 2) 正確な誤差伝播をする際に必要となる、 $P(n)$ の相関係数マトリックスが記してある。これを利用することで、 ν , q の階乗モーメントの誤差をより厳密に評価することができる。

R. Gwin により測定された 1 核分裂反応当りに発生する中性子数 n の確率分布 $P(n)$ およびその相関係数マトリックスを、 ^{235}U については Table A-3、Table A-5 に、 ^{252}Cf については Table A-5、Table A-6 にそれぞれに示す。ただし ^{235}U の相関係数マトリックスについては、参考文献において記入漏れがあったため、不足した相関係数としては ^{233}U の値を用いることにした。

Table A-3 ^{235}U の 1 核分裂反応当りに発生する中性子数 n の確率分布 $P(n)$ ^[32]

n	$P(n)$
0	0.0291 ± 0.0009
1	0.1660 ± 0.0024
2	0.3361 ± 0.0034
3	0.3073 ± 0.0035
4	0.1333 ± 0.0026
5	0.0259 ± 0.0014
6	0.0021 ± 0.0006
7	0.0002 ± 0.0002

Table A-4 ^{235}U の確率分布 $P(n)$ の相関係数マトリックス^[32]

$P(n) \backslash P(n')$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1.00	-0.37	0.19	-0.11	-0.07	-0.04	0.00	0.00
1	-0.37	1.00	-0.53	0.11	-0.18	-0.05	-0.01	0.00
2	0.19	-0.53	1.00	-0.70	0.15	-0.09	0.00	0.00
3	-0.11	0.11	-0.70	1.00	-0.57	0.24	-0.04	0.01
4	-0.07	-0.18	0.15	-0.57	1.00	-0.52	0.20	-0.05
5	-0.04	-0.05	-0.09	0.24	-0.52	1.00	-0.53	0.22
6	0.00	-0.01	0.00	-0.04	0.20	-0.53	1.00	-0.59
7	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.05	0.22	-0.59	1.00

注意：上の表において黄色のセルは、参考文献において記入漏れがあった部分である。参考文献より、 ^{233}U の ^{235}U の確率分布 $P(n)$ の相関係数マトリックスの全体的な傾向は同じだったので、記入漏れのあった部分については ^{233}U の値を用いることにした。

Table A-5 ^{252}Cf の 1 核分裂反応当りに発生する中性子数 n の確率分布 $P(n)$ ^[32]

n	$P(n)$
0	0.0021 ± 0.0002
1	0.0249 ± 0.0008
2	0.1225 ± 0.0012
3	0.2722 ± 0.0011
4	0.3067 ± 0.0008
5	0.1876 ± 0.0010
6	0.0680 ± 0.0006
7	0.0141 ± 0.0002
8	0.0018 ± 0.0001
9	0.00010 ± 0.00002

Table A-6 ^{252}Cf の $P(n)$ の相関係数マトリックス ^[32]

$P(n) \backslash P(n')$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.00	-0.82	-0.48	-0.52	-0.43	-0.01	0.14	0.18	0.11	0.04
1	-0.82	1.00	0.79	0.84	0.11	-0.43	-0.55	-0.49	-0.25	-0.08
2	-0.48	0.79	1.00	0.72	-0.04	-0.69	-0.74	-0.62	-0.30	-0.09
3	-0.52	0.84	0.72	1.00	-0.35	-0.50	-0.69	-0.54	-0.27	-0.08
4	-0.43	0.11	-0.04	-0.35	1.00	0.10	0.46	0.15	0.11	0.02
5	-0.01	-0.43	-0.69	-0.50	0.10	1.00	0.53	0.69	0.22	0.10
6	0.14	-0.55	-0.74	-0.69	0.46	0.53	1.00	0.32	0.43	0.04
7	0.18	-0.49	-0.62	-0.54	0.15	0.69	0.32	1.00	-0.22	0.31
8	0.11	-0.25	-0.30	-0.27	0.11	0.22	0.43	-0.22	1.00	-0.57
9	0.04	-0.08	-0.09	-0.08	0.02	0.10	0.04	0.31	-0.57	1.00

以上で示した Table A-3、Table A-5 を用いることで、 ν 、 q の階乗モーメントを以下のように評価することができる。

$$\langle \nu \rangle = 2.437 \pm 0.006 \quad (\text{A-4})$$

$$\langle \nu(\nu-1) \rangle = 4.70 \pm 0.03 \quad (\text{A-5})$$

$$\langle \nu(\nu-1)(\nu-2) \rangle = 6.89 \pm 0.07 \quad (\text{A-6})$$

$$\langle q \rangle = 3.773 \pm 0.007 \quad (\text{A-7})$$

$$\langle q(q-1) \rangle = 11.94 \pm 0.04 \quad (\text{A-8})$$

$$\langle q(q-1)(q-2) \rangle = 31.4 \pm 0.2 \quad (\text{A-9})$$

上で得られた ν 、 q の階乗モーメントを利用することで、三次中性子相関法で用いる定数 δ_2 、 δ_3 、 F は以下のように求められる。

$$\delta_2 = 1.64 \pm 0.01 \quad (\text{A-10})$$

$$\delta_3 = 2.94 \pm 0.04 \quad (\text{A-11})$$

$$F = 0.76 \pm 0.01 \quad (\text{A-12})$$

以上で得られた、空間依存性の効果を見捨てた定数 δ_2 、 δ_3 、 F を用いて、三次中性子相関法により未臨界度を評価した。測定で得られた Y 、 X 値を、基本モード近似により得られる以下の解析式でフィッティングした。

$$Y(T) \cong Y_\infty \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) \quad (\text{A-13})$$

$$X(T) \cong X_{2\infty} \left(1 + e^{-\alpha T} - 2 \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right) + X_{3\infty} \left(1 - \frac{3 - 4e^{-\alpha T} + e^{-2\alpha T}}{2\alpha T} \right) \quad (\text{A-14})$$

ただし、 Y 、 X 値の理論式のフィッティングは自作の最小二乗フィッティングプログラムにより行った。また最小二乗法でフィッティングする際に、三次中性子相関法の解析公式から得られる以下の関係式

$$X_{2\infty} = \frac{3}{1 + \delta_2(-\rho)} Y_\infty^2 \quad (\text{A-15})$$

$$X_{3\infty} = F \frac{\{1 + \delta_3(-\rho)\}(-\rho)}{\{1 + \delta_2(-\rho)\}^2} Y_\infty^2 \quad (\text{A-16})$$

を用いて、 X 値の二又、三又成分の飽和値 $X_{2\infty}$ 、 $X_{3\infty}$ を、 Y 値の飽和値 Y_∞ と未臨界度 $(-\rho)$ で表した。こうすることで、理論式のフィッティングパラメーターを α 、 Y_∞ 、 $(-\rho)$ の 3 つだけにし、モンテカルロシミュレーションにより得られた Y 、 X 値を同時にフィッティングすることで未臨界度 $(-\rho)$ を直接評価した。今回の解析では、フィッティング範囲により恣意的な結果を得ることがないように、得られた全ての点に対してフィッティングを行った。各未臨界体系に対して得られた即発中性子減衰定数 α と未臨界度 $(-\rho)$ のフィッティング結果を、それらの参照値とともに Table A-7 に示す。Table A-7 より、中性子減衰定数 α については参照値と比較的近い値を得ることができたことが分かる。しかし未臨界度 $(-\rho)$ については、参照値から大きく異なるだけでなく、未臨界度の大小関係を再現できていないという非常に好ましくない結果が得られた。この原因は、本研究で述べたように、 Y 、 X 値に現れる空間依存性の効果であると考えられる。従って、KUCA の実験結果を正しく解析するためには、三次中性子相関法で用いる定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 、および高次モード補正因子 ω を数値計算により求める必要がある。

Table A-7 三次中性子相関法による測定結果

未臨界体系	α [1/s]		$(-\rho)$ [% $\Delta k/k$]	
	参照値	測定値	参照値	測定値
1	391	352.7 ± 0.4	1.3	5.7 ± 0.1
2'	732	699.3 ± 0.7	2.7	4.64 ± 0.07
3	1118	1082 ± 2	4.5	0.0 ± 0.1

A.5 まとめ

現時点では三次元決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを作成することができなかつたので、空間依存性の効果を見捨て、1点炉近似により KUCA で行った三次中性子相関法の実験結果を解析した。その結果、 Y 、 X 値に現れるデータ数の有限性の効果については、不偏分散および不偏三次モーメントを用いることで排除することができた。しかし、1点炉近似による三次中性子相関法では、KUCA で得られた実験結果より正しく未臨界度を評価することができなかつた。

今後の課題として、空間依存性の効果を考慮に入れた三次中性子相関法の実験結果の解析を行うことが挙げられる。具体的には、三次中性子相関法で用いる定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 、および高次モード補正因子 ω を数値計算で求める必要がある。従って、これらの定数 $\delta_{2,0}$ 、 $\delta_{3,0}$ 、 F_0 、 ω を計算するために、まずは三次元決定論的 Y 、 X 値計算プログラムを作成する必要がある。

Appendix B

自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムの概要

B.1 目的

ここでは本研究で用いた、自作の中性子輸送モンテカルロシミュレーションプログラムの概要について述べる。また数値計算で用いた、1群定数の作成法についても述べる

B.2 概要

作成したモンテカルロ・シミュレーションプログラムの概要を以下に示す^[11,26,27]。

- 1) 無限均質体系。
もしくは裸の1次元平板・均質体系、平板の厚さ a 。
- 2) エネルギー1群。
- 3) 遅発中性子無視。
- 4) 外部中性子源は時間的に一様に崩壊する。
- 5) 外部中性子源は自発核分裂源である ^{252}Cf 線源を想定し、線源1崩壊当りに発生する中性子数は二項分布に従うとする。
- 6) 外部中性子源の崩壊により、中性子は実験室系で等方に放出される。
- 7) 中性子の散乱は実験室系で等方である。
- 8) 体系内の核分裂性核種として ^{235}U を想定し、1核分裂当りに発生する中性子数は二項分布に従うとする。
- 9) 核分裂反応により、中性子は実験室系で等方に放出される。

B.3 計算フローチャート

自作のモンテカルロシミュレーションプログラムのフローチャートを、Fig. B-1 から Fig. B-3 に示す。

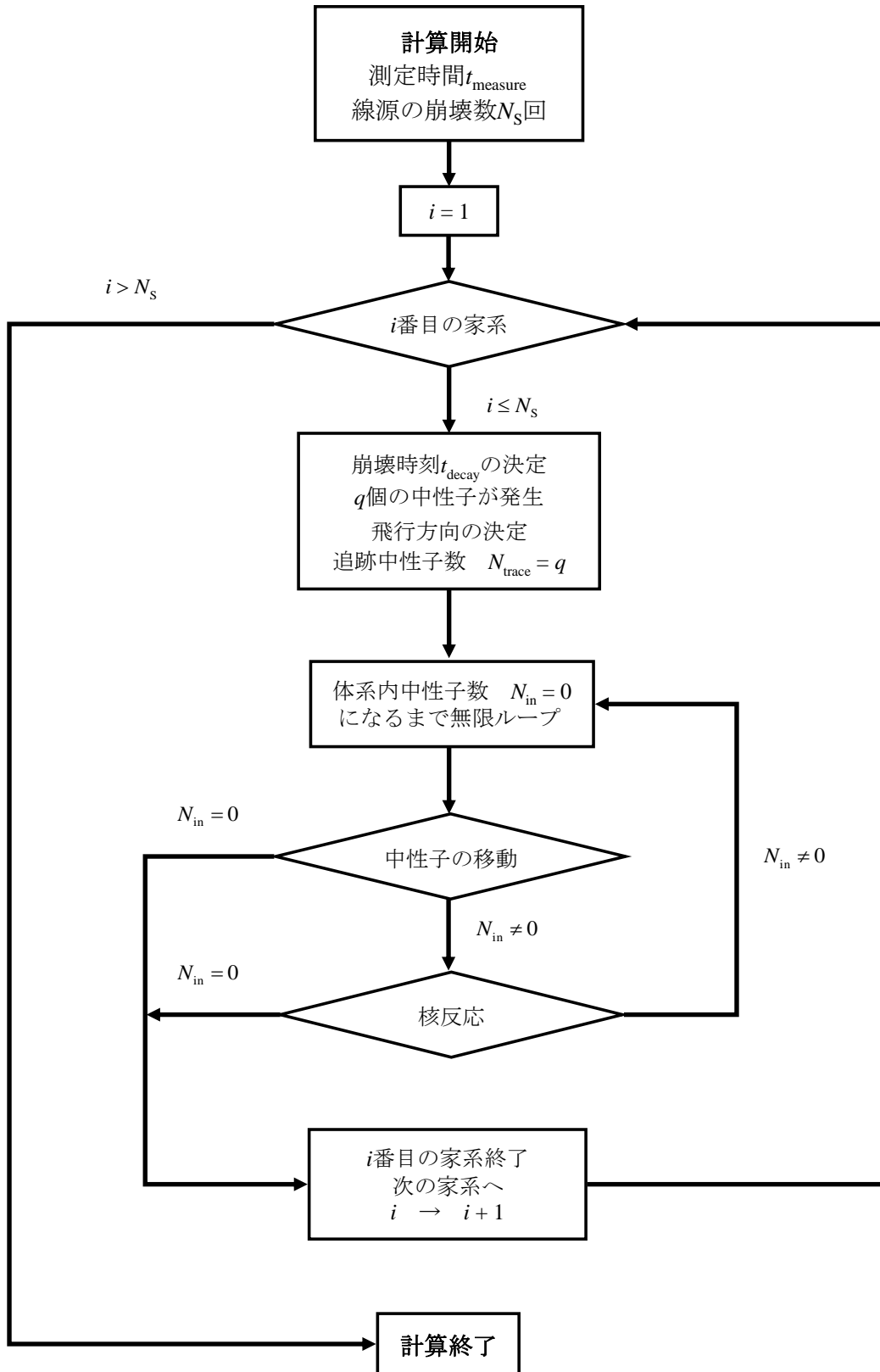


Fig. B-1 モンテカルロシミュレーションプログラムのフローチャート 1

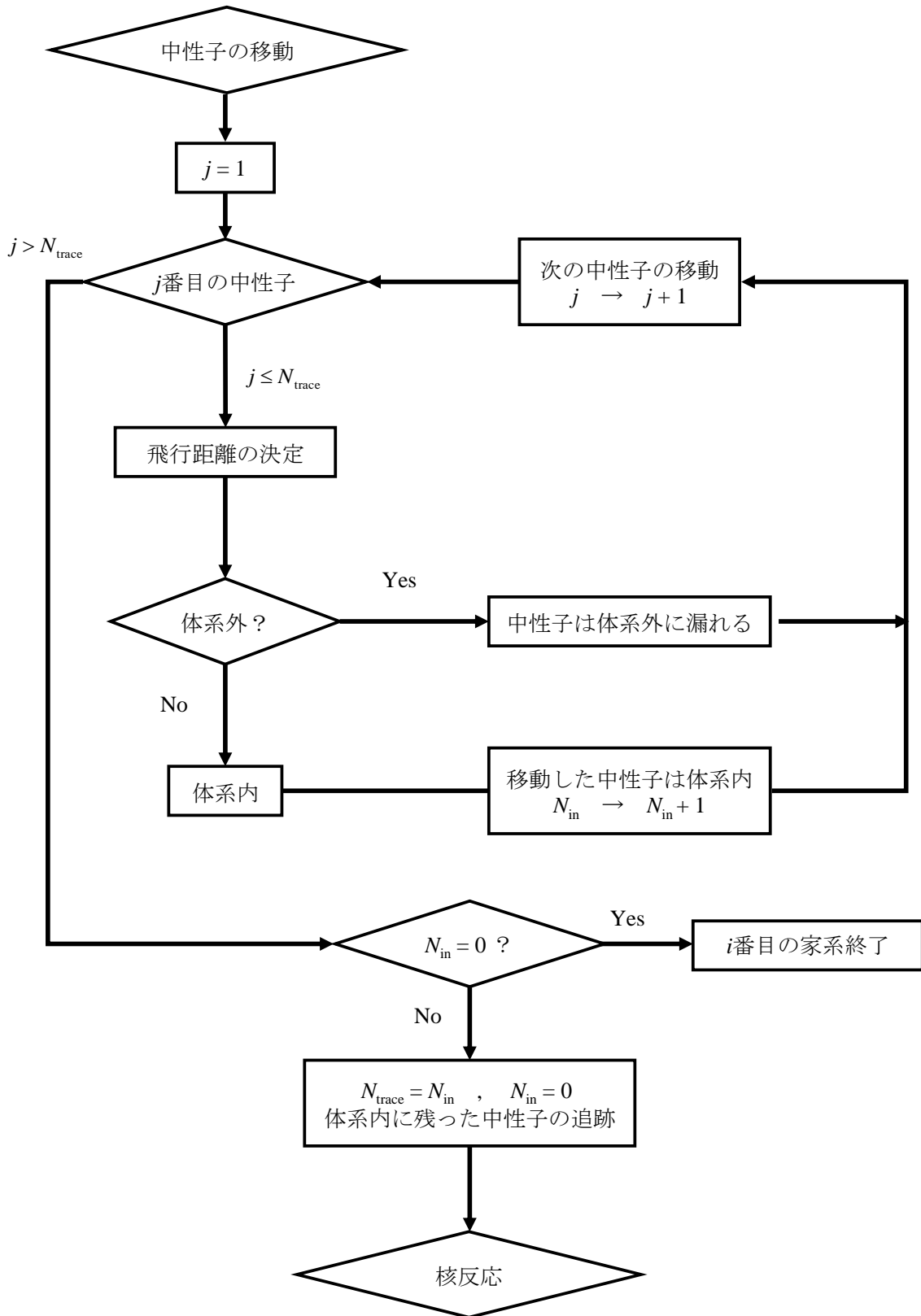


Fig. B-2 モンテカルロシミュレーションプログラムのフローチャート2

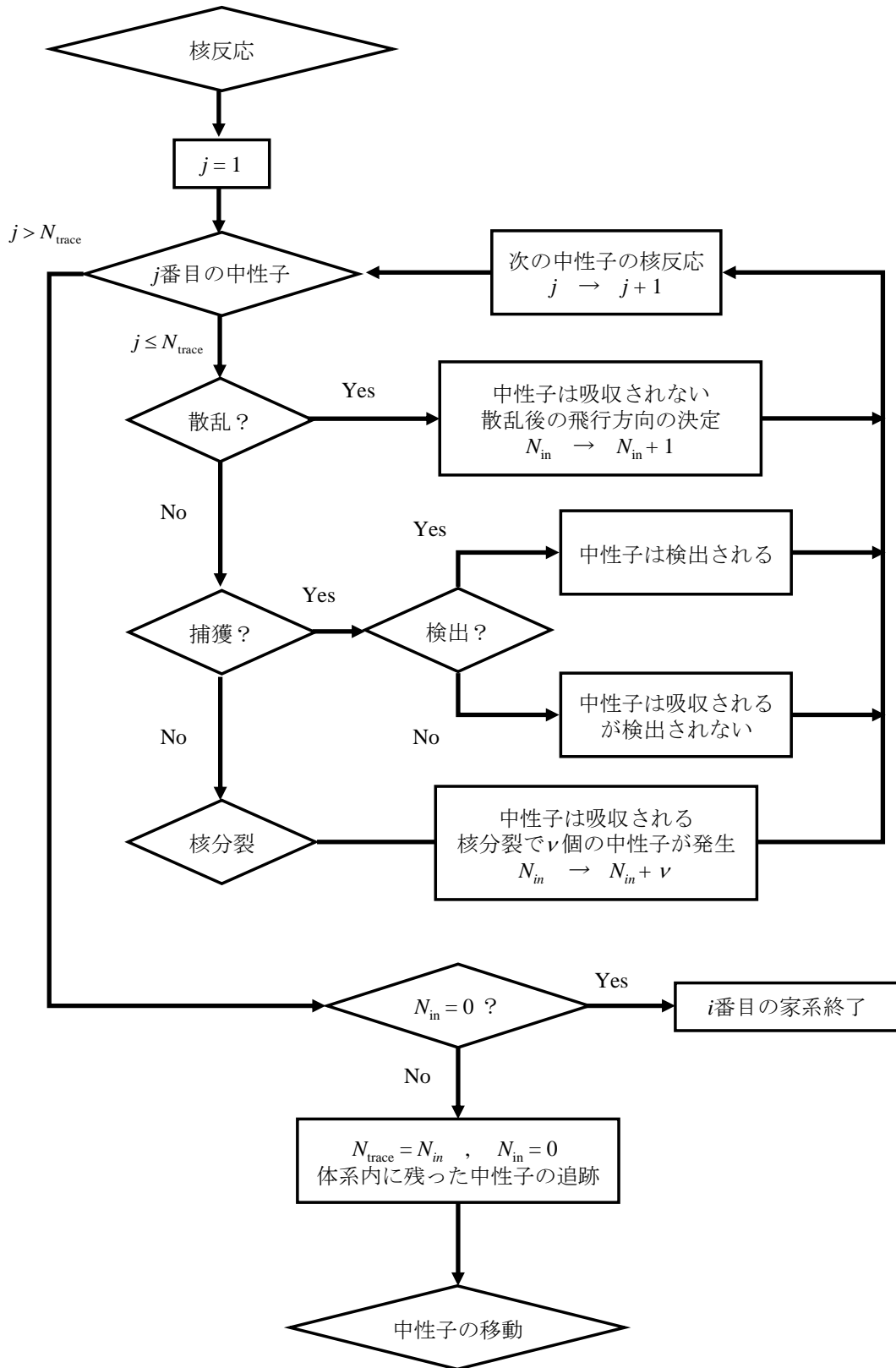


Fig. B-3 モンテカルロシミュレーションプログラムのフローチャート 3

B.4 具体的な処理法

1) 乱数の発生法

モンテカルロシミュレーションで用いる乱数はMersenne Twisterを利用した^[33]。Mersenne Twisterを用いて0以上1未満もしくは0以上1以下の擬似乱数 ξ を計算させた。

2) 外部中性子源の崩壊時刻

1回の測定時間を t_{measure} 、定常に達するまでの削除時間を t_{cut} とするとき、線源の崩壊時刻 t_{decay} は $-t_{\text{cut}} \leq t_{\text{decay}} < t_{\text{measure}}$ の範囲で一様に分布させて決定した。すなわち $0 \leq \xi < 1$ の乱数 ξ を用いて

$$t_{\text{decay}} = (t_{\text{cut}} + t_{\text{measure}})\xi - t_{\text{cut}} \quad (\text{B-1})$$

により決定した。

3) 外部中性子源で発生する中性子数

外部中性子源の自発核分裂により q 個の中性子が発生する確率 $p_s(q)$ は二項分布

$$p_s(q) = \frac{q_{\text{max}}!}{q!(q_{\text{max}} - q)!} \left(\frac{\langle q \rangle}{q_{\text{max}}} \right)^q \left(1 - \frac{\langle q \rangle}{q_{\text{max}}} \right)^{q_{\text{max}} - q} \quad (\text{B-2})$$

に従うとした。ただし $\langle q \rangle$ は自発核分裂により発生する平均中性子数、 q_{max} は自発核分裂により発生する最大中性子数を表す。(B-2)式で表される二項分布を用いて計算される平均及び2次モーメント量が文献値^[10]になるべく近くなるように二項分布のパラメーター $\langle q \rangle$ 、 q_{max} を決定する。本論文における数値計算では $\langle q \rangle = 3.876$ 、 $q_{\text{max}} = 7$ とした。

以上の確率分布 $p_s(q)$ より、外部中性子源で発生する中性子数 q は、 $0 \leq \xi < 1$ の乱数 ξ を用いて

$$\sum_{q'=0}^{q-1} p_s(q') \leq \xi < \sum_{q'=0}^q p_s(q') \quad (\text{B-3})$$

により決定した。

4) 外部中性子源で発生した中性子の飛行方向の決定

外部中性子源で発生した中性子の飛行方向は実験室系で等方なので、立体角 Ω の方向に発生する確率 $P(\Omega)d\Omega$ は

$$P(\Omega)d\Omega = \frac{1}{4\pi} d\Omega \quad (\text{B-4})$$

で表される。極座標系 (r, θ, φ) において立体角 Ω を考えた場合、角度 θ 、 φ 方向に中性子が等方に発生する確率 $P(\theta)d\theta$ 、 $P(\varphi)d\varphi$ は、それぞれ以下のように表される。

$$P(\theta)d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \quad (\text{B-5})$$

$$P(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi} d\varphi \quad (\text{B-6})$$

一次元平板体系のモンテカルロシミュレーションの場合、平板の厚さ方向の軸との成す角を θ とすれば、 θ のみを考慮するだけでよい。このとき飛行方向 θ は(B-5)式を、 θ について0から θ まで積分したのに対して $0 \leq \xi \leq 1$ の乱数 ξ を用いて

$$\int_0^\theta P(\theta') d\theta' = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = \xi \quad (\text{B-7})$$

$$\theta = \arccos(1 - 2\xi) \quad (\text{B-8})$$

により決定した。

5) 中性子の飛行距離

中性子が距離 l だけ飛行して初めて衝突する確率 $P(l)dl$ は巨視的全断面積 Σ_t を用いて

$$P(l)dl = \Sigma_t e^{-\Sigma_t l} dl \quad (\text{B-9})$$

で表される。ゆえに核反応を起こすまで進む距離 l は(B-9)式を、 l について 0 から l まで積分したのに対して $0 \leq \xi < 1$ の乱数 ξ を用いて

$$\int_0^l P(l') dl' = 1 - e^{-\Sigma_t l} = \xi \quad (\text{B-10})$$

$$l = -\frac{1}{\Sigma_t} \ln(1 - \xi) \quad (\text{B-11})$$

により決定した。

6) 中性子の漏れの判定

厚さ a の一次元平板体系の場合、移動後の中性子の x 座標 x_{after} が

$$x_{\text{after}} < 0 \text{ または } a < x_{\text{after}} \quad (\text{B-12})$$

が成立した時に、体系から漏れたと判断した。

7) 核反応の種類判定

中性子がある核反応 x (散乱 or 捕獲 or 核分裂) を起こす確率 P_x は核反応 x の巨視的断面積 Σ_x 、巨視的全断面積 Σ_t を用いて

$$P_x = \frac{\Sigma_x}{\Sigma_t} \quad (\text{B-13})$$

で表される。計算時間を短縮するために最も起こる確率が高い反応から順に判定することにした。 $0 \leq \xi < 1$ の乱数 ξ を用いて

$$\sum_{j=0}^{j-1} P_{x_j} \leq \xi < \sum_{j=0}^j P_{x_j} \quad (\text{B-14})$$

により核反応 x_j が起こったと判定した。ただし x_j は j 番目に判定する核反応とする。

8) 中性子の散乱方向の決定

核反応として散乱反応が起こった場合には、散乱方向を決定する。このとき実験室系で等方に散乱されるので、4)の場合と同様に決定した。

9) 中性子検出の判定

核反応として捕獲反応が起こった場合には、検出効率 ε に従って中性子が検出されるか判定する。 $0 \leq \xi < 1$ の乱数 ξ を用いて

$$\xi < \varepsilon \quad (\text{B-15})$$

を満たした場合に中性子を検出する。中性子が検出された場合には、中性子検出時刻の情報をデータとして蓄積する。こうして得られた中性子検出時刻の時系列データを、実際の測定と同様の手法により処理することで、最終的に Y 、 X 値を計算することができる。

10) 核分裂により発生する中性子数

3) の場合同様に、核分裂で ν 個の中性子が発生する確率 $p_f(\nu)$ は二項分布

$$p_f(\nu) = \frac{\nu_{\max}!}{\nu!(\nu_{\max} - \nu)!} \left(\frac{\langle \nu \rangle}{\nu_{\max}} \right)^\nu \left(1 - \frac{\langle \nu \rangle}{\nu_{\max}} \right)^{\nu_{\max} - \nu} \quad (\text{B-16})$$

に従う。ただし $\langle \nu \rangle$ は核分裂により発生する平均中性子数、 ν_{\max} は自発核分裂により発生する最大中性子数を表す。(B-16)式で表される二項分布を用いて計算される平均及び2次モーメント量が文献値^[10]になるべく近くなるように二項分布のパラメーター $\langle \nu \rangle$ 、 ν_{\max} を決定した。本論文における数値計算では $\langle \nu \rangle = 2.474$ 、 $\langle \nu(\nu-1) \rangle = 4.876$ とした。

以上の確率分布 $p_f(\nu)$ より、体系内の核分裂により発生する中性子数 ν は、 $0 \leq \xi < 1$ の乱数 ξ を用いて

$$\sum_{\nu'=0}^{\nu-1} p_f(\nu') \leq \xi < \sum_{\nu'=0}^{\nu} p_f(\nu') \quad (\text{B-17})$$

により決定した。

11) 核分裂で発生した中性子の飛行方向の決定

核分裂で発生した中性子の飛行方向は実験室系で等方なので、4) の場合と同様に決定した。

B.5 1 群定数の作成

自作のモンテカルロシミュレーションで計算を行うためには、巨視的断面積や中性子速度といった1群定数が必要後なる。これらの1群定数を作成するために、連続エネルギー中性子輸送モンテカルロコード MVP^[26]、および汎用核計算コードシステム SRAC の PIJ(衝突確率法)^[34]を用いた。Fig. B-4 に計算体系、Table B-1 に計算体系の物質組成を示す。計算体系は日本原子力研究所の軽水臨界実験装置 TCA(Tank-type Critical assembly)の燃料棒が無限に並んでいることを想定している。

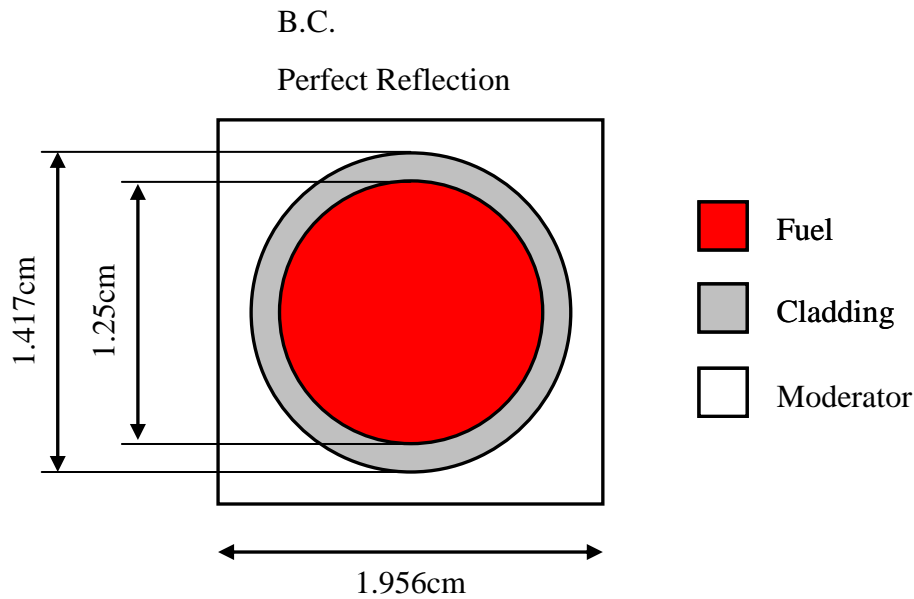


Fig. B-4 TCA 燃料セルの計算体系

Table B-1 TCA 燃料セルの物質組成

領域	核種	個数密度 [$\times 10^{24}$]
Fuel	^{235}U	6.086E-04
	^{238}U	2.255E-02
	O	4.725E-02
Cladding	Al	5.587E-02
Moderator	H	6.676E-02
	O	3.338E-02

MVP を用いてエネルギー1 群の巨視的散乱断面積 Σ_s 、巨視的捕獲断面積 Σ_c 、巨視的核分裂断面積 Σ_f を作成した。また PIJ の計算により得られた中性子のエネルギースペクトルを重みにして、1 群の中性子の平均速度 v を求めた。Fig. B-5 に PIJ で得られた中性子のエネルギースペクトルを示す。1 群の中性子の平均速度 v は中性子束 $\phi(E)$ を用いて

$$\frac{1}{v} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\phi(E)}{v(E)} dE}{\int_0^{\infty} \phi(E) dE} \quad (\text{B-18})$$

により計算される。PIJ で得られる中性子束は連続エネルギーに対して得られるのではなく、高速群 71 群、熱群 36 群、合わせて 107 群の中性子束の結果が得られる。PIJ で得られた i 群の中性子束 ϕ_i (レサジー平均の中性子束にレサジー幅をかけた) を用いると(B-18)式は

$$\frac{1}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{107} \phi_i}{\sum_{i=1}^{107} v_i} \quad (\text{B-19})$$

となる。ただし v_i は i 群の中性子の平均速度を表す。

以上で作成された 1 群定数を Table B-2 に示す。ただし MVP で作成された巨視的断面積には統計誤差があるが、ここではそれを特に明記しない。こうして作成された Table B-2 の 1 群定数は、明らかに無限増倍率が 1 を超えるものとなっている。本論文における数値計算では、Table B-2 の 1 群定数の巨視的捕獲断面積、巨視的核分裂断面積を適用に調整することで、任意の未臨界体系の 1 群定数を作成した。

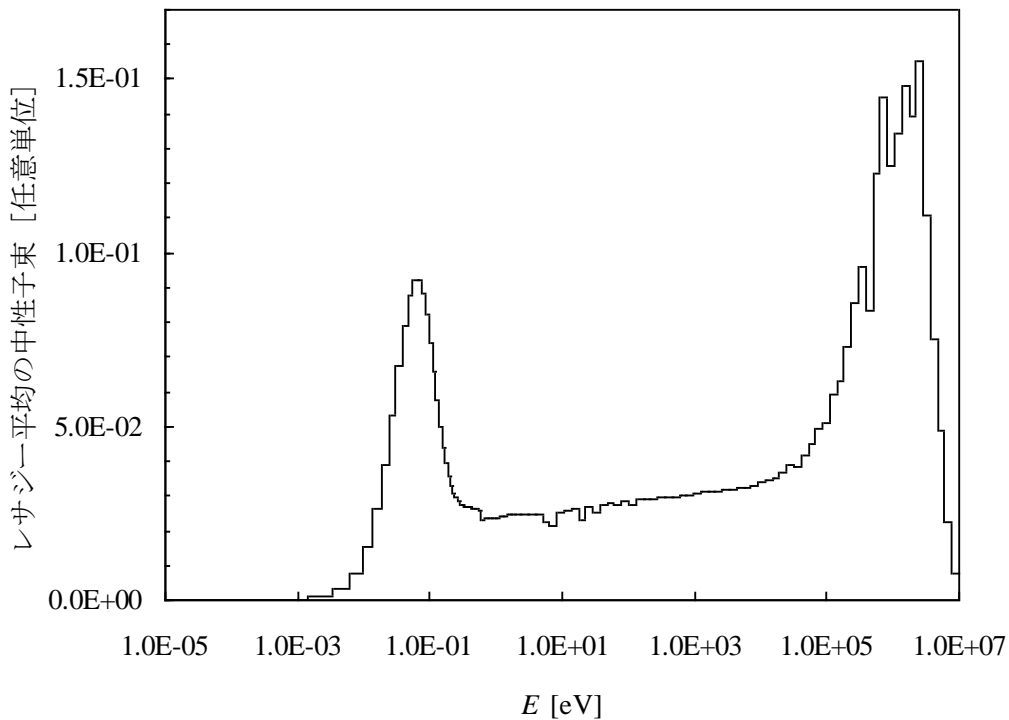


Fig. B-5 TCA 燃料セルのエネルギースペクトル

Table B-2 TCA 燃料セルの 1 群定数

Σ_s [1/cm]	Σ_c [1/cm]	Σ_f [1/cm]	v [cm/s]
9.39369E-01	1.19831E-02	1.52999E-02	1.39521E+06